ISAACI BARROW
Lectiones Mathematicæ
XXIII,

In quibus

Principia Matheſeôs generalia exponuntur :

Habitæ *CANTABRIGIÆ*
A. D. 1664, 1665, 1666.

Acceſſerunt ejuſdem Lectiones IV.

In quibus

Theoremata & Problemata Archimedis
De *Sphærâ* & *Cylindro*,

Methodo Analyticâ eruuntur.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1685.

ALMÆ MATRI,

ACADEMIÆ

CANTABRIGIENSI.

EN *Tibi*, Alma Mater, *doctiſſimas*, *Auctore* Iſaaco Barrow, *Mathematicæ tuæ Profeſſionis Lucaſianæ* Primitias! *Cui etenim ullius Filii longè chariſſimi, niſi* Genetrici *ſuæ concredendæ ſunt* Reliquiæ? *Et ſanè ubinam Gentium* Radii Mathematici *plùs & potiùs quàm in* Lucis Tuæ *centro ſunt colligendi?* Næ Poſthumum *hoc* Opus *Tibi pergratum fore meritò cenſemus; utpote quod Eruditiſſimum ſuum* Fontem *&* Authorem *Tuæ cæterorúmque Literatorum omnium memoriæ* redivivum, *& quaſi coràm ediſſerentem exhibet. Imò ne-*

nefas eſſet pretioſiſſimos clariſſimi illius Viri Fœtus *ab interitu omni curâ ac diligentiâ non tueri, cujus divino prorſus ingenio* Euclides, Theodoſius, Archimedes, Apollonius, *&c. Venerandi Scientiarum Antiſtites, novâ quadam perpetuitate donantur. Tibi vero,* Alma Mater, *naſcatur hujuſmodi feliciſſimorum* Ingeniorum *numeroſa, & æterna* Progenies. *Ita vovet*

G. WELLS.

MATHEMATICI
PROFESSORIS
LECTIONES,
PRO
Anno Milleſimo Sexcenteſimo Sexageſimo Quarto.

Ἀρχεῖ, εἰ τὰ μὲν ὡ χεῖρον. *Ariſt. Metaph.*

J. B.

ORATIO
PRÆFATORIA.
Mart. 14. 1664.

UT conquieverit paulò solennium negotiorum æstus, & restituta tantisper rebus vestris tranquillitas dandis accipiendisque novis animos apparaverit vobis, aures patefecerit; attendite sultis, Academici, insolitæ rei quiddam, & prodigii non absimile denarrare gestienti. Affulsit nuper; quidnam inquietis? an dixus cometes funestorum casuum prænuncius, cujusmodi plusculos indies, vel invito talo, fanaticorum capitum distorta contuetur acies? imò novum, at benesicum sydus, vero pariter ac fausto jubare scintillans, quale nullum constat à multis annis supra Academicum horizontem emersisse; cujus ego nunc ut dimetiar magnitudinem, motus explicem, præsagiam eventus, haud vanus utique huc prodeo Astrologus. Vultis edisseram clarius?

riùs? quàm iniquum ſit in literas, erga literatos invidum, ingratúmque audiat hoc ſeculum, ignorare nemo poteſt, qui vel ad illarum calamitoſam ſortem obverterit oculos, aut ad crebras horum querelas non prorſus obſurduerit. Quò demiremini magis, qui triſtes hâc tempeſtate camœnas reſpiceret, iſtam infami ſeculo labem abſtergeret, elanguentibus ſtudiis vigorem inſpiraret, obductam longâ deſuetudine, nulliſque jamdudum veſtigiis ſignatam benefaciendi ſemitam retegeret, eximium tandem comparaſſe Mecœnatem; nedum titulo tenus, ut ſit, ſed ipſiſſimâ re Mecœnatem; non qui nudam oſtentârit gratiam. aſt ſolidam operam impenderit literis; non ipſas benevolo tantùm affectu complexus, ſed munificâ quoque manu ſit proſecutus. Cujûs ego viri ut laudes efferam, ut virtutes deprædicem, utinam mihi congrua tantis meritis verba, par tali materiæ eloquium obtigiſſet, neque de adeò præluſtri argumento tam mihi arduum eſſet dignè fari, quàm nefas eſt omninò tacere. Utcunque cùm publicæ gratitudinis interſit, meique præſertim id exigat officii privati ratio, etſi facultatem præſtare non poſſum, voluntatem tamen oſtendam,

dam, aliquo saltem, imperfecto licèt & inconcinno, elogio præclari Benefactoris memoriam cohonestandi. Fuit is (assurgite quotquot estis Academici, tantóque debitam nomini reverentiam exhibete) Henricus Lucas; Lucas, inquam, Martiam simul virtutem effulminans, & Palladiam sapientiam expirans nomen; belli togæque laudibus utramque paginam historiæ repleturum; futurúmque apud posteros an heroicæ fortitudinis nescio vel divinæ munificentiæ exemplis celebratius. Henricus Lucas; vir à prosapiæ dignitate prolixè commendandus (utpote qui prænobiles familias proximâ sanguinis agnatione contigerit) nisi quod amplitudini generis potior animi magnificentia detraxerit, & virtutum excellentia natalium quasi splendorem obumbrârit. Modicas illi facultates nascendi sors attribuit, quas etiam pupillo litigiosi fori subtraxit importunitas, juniſque injuria surripuit; prosperâ fati iniquitate, nè scilicet inconsultæ fortunæ potius quàm laudabili solertiæ suæ vel honestè vivendi copia, vel gloriosè beneficiendi facultas posset imputari. Etenim à parentibus transmissas possidere divitias puræ felicitatis est, acquirere

ſibi perfectæ laudis; quæ aliunde quis acceperit aliis impertire, juſtæ reſtitutionis ſpeciem habet; ſuo autem labore parta comiter elargiri, titulum meritò præ ſe ferat liberalis beneficii: maximam indè partem gloriæ caſus decerpat, integrum hinc ſibi virtus adjudicat. Talis noſter, ſortis auctor propriæ, ſuæ virtutis hæres, privatæ ſoboles induſtriæ, ex anguſta re ad amplas opes enixus, ab humili ſtatu in ſpectabilem gradum evectus eſt. Quo pacto ſciſcitemini, quibúſve fretus ad miniculis? an rapinis graſſando, fovendo lites, merces commutando, illiberales quæſtus exercendo? nullâ harum, ſed innocentiſſimâ ratione, probatiſſimis artibus, quibúſque natura homines ad propulſanda vitæ incommoda ſanctiſſimis armis inſtruxit, elegantiâ ingenii, linguæ ſuadâ, morum probitate. Ampliſſimo nempe collegio Sancti Johannis (quod cùm innumeros addixerit Eccleſiæ, permultos accommodârit Reip. inſignes viros, nullum, opinor, Academiæ enutrivit utiliorem alumnum) huic inquam feraci ſeminario implantatus, adeò feliciter adolevit, ità bonis artibus ingenium excoluit, probis animum imbuit moribus; ut, cùm nulli non aptus muneri,

quâvis

quâvis promotione dignus videretur, id saltem maturè assequutus est, ut in Illustrissimi Comitis Hollandiæ (viri præcipuâ apud serenissimum Regem gratiâ florentis, & Cancellarii vestri summis etiam proceribus invidendo tunc honore præfulgentis) familiam adscitus, secretioribus ejus consiliis & litteris (qui potissimus est & perquam honorificus apud Optimates clientelæ locus) admoveretur; quam adeò singulari dexteritate, sinceritate, diligentiâ spartam exornavit, ut neutiquam mirandum sit, dum patroni res procuraret optimè, suis ipsum non pessimè prospexisse, bonaque frugis aliquid è tam copiosâ messe proprium in horreum reportâsse. Sic amplificato per honestam solertiam censu, pari prudentiâ decrevit uti, nec egregii laboris fructum sibi passus est elabi turpiter, infeliciter abortire: non in splendidos illum luxus erogavit, nec in fœdas profudit voluptates; non (sicut plerisque nunc usu venit opulentis-) otiosorum vernularum stipavit se frequenti satellitio, nec magnificos conviviorum apparatus adornavit; non popularem impendiosè captavit auram; nec politicis semetipsum factionibus immersit: at vitæ genus frugale, modestum, tranquil-

lum amplexatus, ſapientiæ ac pietati vacans unicè, modici temporis erga ſe parſimoniam coluit, ut ſempiternam verſus alios liberalitatem exerceret. De prole ſuſcipienda, vel ſtirpe ſua propaganda parùm ſolicitus patrem ſe egenis præſtitit, ſuis Muſas penatibus aſcripſit, univerſos ſibi poſteros velut adoptavit; neutiquam id ſibi penſi datum arbitratus, ut unum aliquem efficeret ſegniter locupletem, ſed ut plurimorum neceſſitati ſubveniret, omnium induſtriam compenſaret; nec ut privatam domum adimpleret copiâ, ſed ut totum genus humanum ſcientiâ colluſtraret. Quanquam haud videri debet vel familiæ ſuæ neglexiſſe decus, aut famæ ſui nominis ullatenus offeciſſe, quibus adeo durabilia conſtituit monumenta, quarùmque memoriam immortalibus Muſis commendavit. Nam accuratâ modò lance rem perpendamus, non aliâ quâcunque viâ generoſæ propaginis gloria ſeipſam diſſeminet latiùs, aut radices ſuas altiùs infigat æternitati, quàm literarum ſibi favorem demerendo; quibus ipſum ſcilicet tempus ſuarum rerum cuſtodiam aſſignare, conſcientiam ſolet accredere, quarúmque ſemper indefeſſo ſpiritu canora famæ buccina inflatur. Intereant oportet

tet literæ, lumen extinguatur omnis memoriæ, diffusissimâ barbarie rerum facies obruatur, quàm Lucasianum cesset inclarescere nomen, inque hoc perpetim illustri gloriæ theatro solenni cum laude personare. Sed neque justitiæ minus in hoc proposito, quam prudentiæ specimen elucescit. Aliquid à prosapia fortitus est lucis, plus in illam splendoris refudit; tenue patrimonium à majoribus accepit, larga cognatis munera redonavit; amicorum benevolentiæ fœnus amplum retulit; neminem de se bene meritum non vicissim benefaciendo superavit. Quod si literarum præsertim auspiciis suprema cùm fortunæ suæ præsidia, tum animi ornamenta consecutus est; si Academiæ parenti vitæ melioris initium, magistræ virtutis quâ emicuit disciplinam, cultúmque quo excelluit ingenii, fautrici demùm eximium dignitatis suæ debuerit incrementum; quamobrem non meritissimo jure parem illis rependeret gratiam, mutuis hanc officiis devinciret? quid enim, Academiæ nomine semel atque iterum ad suprema Regni comitia destinari, senatoriâ purpurâ decoratum literati populi causam agere, tutelam suscipere, personam sustinere; vestrum, hoc est ipsissimum

mum

mum ſapientiæ, corpus repræſentare; veſtro graviſſimo judicio probari, deligi, claris competitoribus anteponi, num parvi pendendum decus eſt? imò quolibet pretio pluris æſtimandum, nullis non faſtuoſis titulis præferendum. Atque utinam Academici, ſic perpetuò cum rebus veſtris comparatum eſſet, quos educatio ſua in ſublimiorem extulit gradum, quóſque conſimili benevolentiæ teſtimonio afficitis, ut ii pariter evadant erga vos animati; ut ſæpiùs judicia veſtra tam auſpicatò colliment, beneficia veſtra tam rectè collocentur: non ità liberales ſcientiæ pabuli inopes, honoris exſortes marceſcerent, nec dignis modò præmiis, at neceſſariis etiam ſubſidiis deſtituta ſtudia languerent. Enimverò ſolus ille jam à plurimis annis ab injuria literas protexit, à contemptu aſſeruit, ab inopia liberavit, operâ ſuâ adjuvit, opibus adauxit ſcientias. Iniquis ſiquidem iſtis & infauſtis temporibus, cùm proventibus Academicis avida barbaries inhiaret; onera cùm imponeret omnibus, & graviſſima undicunque tributa corrogaret; cauſam ille veſtram tutatus eſt acriter, immunitates veſtras ſtrenuè propugnavit; anniſus eſt vehementer, & multum effecit,

cit, quà consilio quà eloquio suo, nè toga sago fieret vectigalis, nè Martis furor Minervæ fundum depasceret, nè honestis artibus fovendis dicatæ opes ad sustentandam nefariam tyrannidem, ad improbos ausus promovendos perverterentur. Ità clypeum se vestrum tunc objecit importunæ nequitiæ, gladium posteà vobis adversus insciticm accincturus; averruncavit à vobis exitiale damnum, mox insigne lucrum adjecturus. Quippe mortalis curriculi cùm extremam penè metam se attigisse præsentiret, ut beneficio saltem perduraret superstes, nec prodesse vobis cessaret, etiam cùm vivere desiisset, cæpit animo versare secum, & cum amicis consilium inire, quâ potissimùm ratione studiis vestris quàm optimè posset consulere; cúmque quâ parte debiles essetis maximè, idoneis illam præsidiis firmare, vulneribus vestris oportuna remedia applicare, defectus supplere, damna resarcire statuisset, omnia circumspectanti succurrit imprimis dignissima beneficentiæ materia Mathematicæ disciplina; quas cùm insignis commendet utilitas ingenuæ delectationi adjuncta, cùm ipsarum peculiaris difficultas auxilii plurimum efflagitet, cùm ipsas veteres sapientiæ Magistri

giſtri præcipuâ curâ excoluerint, omnis ævi homines ingente plauſu exceperint, præſens autem ætas in extremis deliciis habeat, mirandum neſcio magis an dolendum ſit, in hac omnium diſciplinarum fœcunda matre, omnium ſtudiorum benigna nutrice Academia nullum ferme hactenus illis conceſſum fuiſſe locum, nullum aſſignatum præmium, nullum patrocinium indultum. Tantum dedecus amoliri ſtudens, & quò jacentes ſcientias inſtauraret, adjutricem illis ſubminiſtravit manum, Profeſſione Mathematicâ ſuis auſpiciis inſtitutâ, ſuis opibus liberali ſtipendo dotatâ. Quinetiam cùm bibliothecæ veſtræ ſublati libri Lambethani acerbiſſimam plagam inflixiſſent, perſanavit illam, ſaltem valdè mitigavit ſubſtitutâ ſuâ, minùs lautâ quidem nec perindè magnificâ, ſed æquè lectâ, pariter pretioſâ ſupellectile librariâ, inſigni illo tam eruditionis ſuæ monumento, quàm adjumento veſtræ. Quæ benefacta cùm nullis amplificari verbis, nullis queant coloribus illuſtrari; idémque planè ſit illa ſimpliciter recenſere, ac fusè celebrare, vobis potiùs committam gratifico mentis ſenſu recolenda, quàm mihi deſumam rudi encomio temeranda. Adnotare ſaltem

liceat,

liceat, obiter atque ſtrictim, quum (ſicut aſſolet fieri quòd prætermiſſâ matre benigniùs tractentur filiæ) plures in ſingula collegia pronum affectum conteſtati ſint, prægrandia dona contulerint, nullum hactenus univerſæ Academiæ tam officioſum filium, gratum alumnum, munificum patronum obvenisse; quorum tamen illud tanto angustioris animi, tanto exilioris eſt meriti, quanto publicus ſol domeſticæ lampadi prælucet, quantóque augustius eſt beneficum influxum ad omnes diffundere, quàm in paucos derivare. Itidem ut alii majora præſtiterint, noſtrum ſua prudentius diſpenſâſſe; ſiquidem opportuniſſimo tempore, cùm res veſtra, diutiùs neglecta, conſpicui favoris indigeret, & deplorata conditio literarum validam opem imploraret, ad uſus ſummopere neceſſarios, quibuſque neſcio turpiùſne fuerit an damnoſius vos hactenus caruiſſe: alios denique beneficio plurimùm, neminem æquè de vobis exemplo meruiſſe; quando nimirum illi pro temporum ingenio, ſeculique ſui moribus obtemperantes viventibus gratiâ literis acclamârint; hic adverſo ſuæ ætatis genio obnitens invidiâ laborantes, & expoſitas opprobrio literas cuſus eſt favore com-

plecti,

plecti, dignatus est prosequi reverentiâ. Tritum illi callem ingressis comites se vel pedissequos adjunxerunt, per aviam hic solitudinem dux sibi, nemini socius incessit: spes isti vegetas foverunt studiorum, hic prostratas erexit, pessundatas restituit, pene sepultas exsuscitavit: florentem illi demùm suorum temporum famam sustinuerunt aliquatenus, aut tantillùm promoverunt; suum hic seculum nedum insigni honore affecit, quin à gravissima infamia vindicavit; à vulgaribus adeò benefactis vulgarem illi laudem adepti sunt; singularem verò noster à singulari beneficentiâ consecutus est, certè commeruit, gloriam. Antecessorum is utique merita supergressus est longè, palmam certò præripuit Accessuris: ei juxta debemus quæ fecit ipse, quæque deinceps alii similia facturi sunt debebimus; quibus ut patrocinio sublevarent literas faustum omen præbuit, lucidam facem prætulit, apertam viam præmonstravit; neminem ut posthac pudere possit impensæ Musis liberalitatis, omnes verò pudere debeat viri talis auctoritatem non sequi, tanti ducis vestigiis non insistere. Verùm in immensæ orationis pelagus improvisò devehor longiùs, & planè sentio quanto

pro-

proclivius ſit, argumentum nacto tam nobile, tam ſplendidum, tam liberale, nimium dicere quam ſatis. Contraham igitur vela, ſic tamen ut veſtram priùs, præſtantiſſime [illegible], ſuppliciter implorem veniam, tuas quòd ego privatas laudes, eximiam in Deum pietatem, verſus amicos obſervantiam, in omnes benignitatem; illibatum candorem animi, inculpatam morum probitatem; ſingularem in converſando comitatem, in agendo peritiam, in judicando perſpicaciam, in diſſerendo facundiam; in officiis colendis fidem, in factis æquitatem, in dictis modeſtiam, in propoſito conſtantiam; ſincerum amorem veritatis, ardens ſapientiæ ſtudium, excelſam indolem, & conſummatam eruditionem, reliquas & innumeras tuas divinas animi virtutes, præclaras dotes ingenii, egregia vitæ facinora verecundo potiùs obtegam ſilentio, quàm importuno præconio deboneſtem. Quas ego certè cùm ut radios non directo curſu delatos, ſed medii denſioris interjectu refractos & debilitatos, acceperim; non uſu proprio perſpexerim, aſt alienâ fide ſubnixus, & ſolius famæ beneficio cognoverim (fama licèt certè & indubitata, multorumque optimorum & ſapientiſſimorum virorum con-

consonis suffragiis communitæ) si dicendo persequi vellem, quid aliud quàm cæcus clarissimam lucem depingendam, surdus suavissimam harmoniam suscriperem emodulandam? ô si viventis intueri vultum amœnâ luce circumfusum, si contemplari gestus placidâ severitate compositos, si degustare sermones tuos melleâ salubritate condiros, istóque guttulas aliquot ab inexhausto gurgite facundiæ mihi depromere licuisset! tuo forsan pectus impregnatum afflatu quiddam concepisset simile tui, tuo os imbutum nectare tè dignum aliquod profudisset. Nunc satius esse duco tantas virtutes omnino non attingere, quàm injuriâ malè pertractatas affloere, vel inficeto sermone contaminare. Una tantùm superest laus (nec illa tamen postremis accensenda) quam nullâ ratione debeam ego intactam præterire; felicissimæ dico laus prudentiæ, illis in deligendis & deputandis adhibitæ, quibus supremam (suæ voluntatis exequendæ dicam, an dispensandæ charitatis?) curam commendaret. Quippe cum irrita sæpe fiant, & sperato excidant successu vel optimè ab hominibus destinata, istorum quibus committuntur vel improbâ perfidiâ, vel ignavâ supinitate, vel insipiente

piente vecordiâ, id abunde cavit nè ſibi eveniret, cùm teſtamento ſuo præficeret duos incorruptâ fide, invictâ diligentiâ, ſpectatâ prudentiâ viros, quorum utcunque non gratâ recordatione proſequi nomina flagitioſum eſſet mihi, ipſorum cùm erga vos ſummam obſervantiam, tum ſingularem in meipſum humanitatem experto. Unus haud perinde forſitan cognitus vobis (dignus tamen qui pernoſcatur ab omnibus colatúrque) ornatiſſimus & ſpectatiſſimus vir, Robertus Raworth, *Ælio illi Sexto, juriſconſulto Ciceroniano, geminus ac perſimilis: Egregiè cordatus homo, cautúſque, qui cum inſigni juris peritia non inferius juſtitiæ ſtudium conjunxit, cum magno rerum uſu raram mentis integritatem ſociavit; in eo præcipuè mirabilis & felix, quòd cùm ad æquitatis normam dirigat omnia, nec unquam honeſtè faciendi voluntatem bene audiendi gratiæ poſtponat, optimi tamen viri apud omnes conſequi potuit opinionem, & cum recta conſcientia integram famam conſervare. Quadratus homo plane, inque eo, cui ipſum ratio affixit, ſitu inconcuſſus; antiqui moris, apertæ ſinceræque indolis, nullâ involutus nube, nullo fuco incruſtatus, in dijudicandis rerum*

momentis acer & perſpicax; in amplectandis conſiliis maturus & circumſpectus; in retinendo propoſito conſtans & gravis, ut qui nec temerè ſuſcipiat aliquid, neque ſe facilè patiatur à probabili inſtituto dimoveri. Talis denique, cui cùm tutò ſumma fides haberi, & graviſſima negotia rectè committi poſſint, tum in hac adminiſtranda provincia tam fideliter, dextrè, ſapienter ſe geſſit, ut non ego tantùm, & qui mihi in hoc munus ſucceſſuri ſunt, ſed & univerſa Academia, bonæque adeò omnes literæ ſint immortales illi gratias debituræ. Alter autem nemini veſtrûm non ab honeſto quem tot annos, imò tot luſtra, ſuſtinuit apud vos loco notiſſimus, à virtutibus ſuis commendatiſſimus, ab egregiis erga vos meritis colendiſſimus, Thomas Buck; *idem ille, cujus quotidie veſtris oculis auguſta ſpecies corporis, & oris veneranda dignitas obverſatur; cujus indies promptiſſimam humanitatem perſentiſciitis, cujuſque toties in procurandis graviſſimis negotiis veſtris, aſſerendo honore, commodis provehendis gnavam, fidam, proſperámque operam experti eſtis. Vir ſanè, qui cùm omnibus bonis artibus haud mediocriter excultus ſit, cùm pru-*

prudentiâ & fide (per tot amplissimorum virorum approbatis judicia, per tot experimenta gravissima demonstratis) primas concedat nemini, tum verò laudibili industriâ plerosque, penè dixissem omnes, longo intervallo post se relinquit mortales. Difficile mihi sit, imò prorsus impossibile, quos ille vestrâ causâ exantlârit labores, quales pertulerit molestias, quanta devorârit tædia verbis explicare, vel ipsius in agendo diligentiam meâ assequi diligentiâ dicendi. Testis eram, (quatenus inquam admiratio permiserat, testis) quanto ille dum rem vestram typographicam urgeret, cum suæ sanitatis, & rei familiaris dispendio, honori vestro prospiceret, commodo deserviret; quæ nempe laus ejus nitidis impressa characteribus ad infimos usque posteros perennabit, ipsisque adeò cum sacris, quibus pretium adauxit quodammodò, & gratiam adjecit, Bibliis æternitati permanebit consecrata. Cæterùm in hoc ipso, quod præ lingua habemus, negotio, non absque vegrandi stupore mihi licebat observare, virum ætate ingravescentem, nec firmâ satis utentem valetudine tantas alienæ rei vigilias impendere vel potuisse si vellet, aut si posset voluisse,

quantas nemo forſan alius, etiam ætate validus, & corpore robuſtus, ſuæ præſtitiſſet. Tantus illum ardor inflammavit de vobis bene merendi, tale perficiendi quod occæpiſſet egregii facinoris inceſſit deſiderium, ut cum annis accreviſſe vires corporis, cum ætate vigor animi provectior evaſiſſe, & quò ad vitæ centrum propiùs accederet, eò ferri videretur incitatiùs. At quid ejus in hac conficienda re commemoro ſedulitatem, quum in auſpicanda potiùs enixum ſtudium, & impenſam erga vos benevolentiam debeam prædicare? ſiquidem illi tantùm non primas ingentis hujus beneficii partes referre debetis acceptas, cujus excitatus admonitu, conſilio perſuaſus, hortatu compulſus mirificus ille Mecenas noſter cùm Mathematicam hanc inſtituerit profeſſionem, tum lectiſſimo librorum theſauro Bibliothecam veſtram ditârit, ornârítque. Quid enim, annon jure beneficii auctor cenſendus eſt, qui benefactorem ipſum conciliavit, & quaſi donavit vobis; qui alienâ re, ſuâ verò ſapientiâ, ſuâ profuit voluntate; qui aliorſum exundantes munificentiæ rivos in aream veſtram deduxit? abſque quo certè fuiſſet, non eſſet hodiè quòd tantum ego ſtudiis

diis adminiculum, tantùm Academiæ ornamentum, tantum ſeculo exemplum gratularer acceſſiſſe. Hæret profectò lingua, deficit ingenium, collabaſcit animus verba perquirenti tanto beneficio quadantenus adæquata; cujus magnitudinem vos cogitando facilius æſtimare, quàm ego dicendo poſſim exprimere. Ab inſuperabili proinde conatu ſubducam me, poſtquam id unum fuero proteſtatus, illius in me viri eximiam benignitatem pulchriùs longè atque uberius commeruiſſe gratitudinis teſtimonium. Huic igitur obeundo officio deſignati pur illud virorum tale tantúmque, quid? an adhibitam ſibi fidem violârunt, de ſe conceptam ſpem deluſerunt? num pro more nimis quam recepto, privato compendio intenti, vel deſidiæ ſuæ indulgentes ſperatum beneficii fructum in plures annos diſtulerunt? imò nec unum permiſerunt excurrere non liberatæ fidei ſuæ, non abſoluti propoſiti teſtem. Quin ad opus ſemetipſos accingunt ocyùs; libros properè curant ad vos deportandos; profeſſoris exolvendo ſalario terras redimunt, officio definiendo leges præſcribunt, nihil non expediunt quo minus tanti beneficii ſenſum expectandi mora corrumperet; at verò potiùs

ut ſpem veſtram ſua celeritas anteverteret, vix ut priùs ſciretis habituros, quàm habere ſentiatis. Leges dixi præſcripſerunt; illas verò quam ex æquas, quàm ſtudiis proficuas, quàm rerum circumſtantiis accommodatas, ſententiam proferre nolo, neque tantæ rei mihi temerè cenſuram arrogabo. Illud ſaltem auſim affirmare, liquidò mihi compertum, è viris qui viderunt, judicio valentibus, & nullo præjudicio occupatis (viderunt autem permulti dignitate juxtà ac ſapientiâ præcellentes) modicè dicam, pleroſque omnes admodum probâſſe, nec paucos illas qualicunque laude dignas cenſuiſſe; dignas utcunque viſas quas reclamante nemine authoritas Regia ſanciret, & ratas faceret. Ità partibus ſuis abſolutiſſimè perfuncti, non tamen eò proceſſiſſe contenti ſubſtiterunt, at voluntate bene merendi poteſtatis ſuæ limites quodammodò prætergreſſi, privilegia bene multa huic loco ſeu valde utilia, ſeu planè neceſſaria, quæ præſtare non poſſent ipſi, à Regia clementia ultrò impetrarunt; quo nomine quicunque poſthac hujuſce profeſſionis munus ampleßentur, tenebuntur eos ceu fundatores alteros, certè fautores palmarios, libenter agnoſcere, gratè profiteri. De

illis

illis porrò, quorum præcipuè res hæc gesta est, & ordinata consilio, reverendis Collegiorum præfectis, mihi quantum ætate præcedentibus, & antestantibus dignitate, tantùm judicio prævalentibus, & elogio superioribus meo, nihil audebo quicquam enarrare; id unum dixero feciſſe illos, quod rem publicam spectat, ut tales viros decuit, sapienter ac moderatè; à me autem cunctos haud exiguam iniiſſe gratiam -- duobus præsertim, cùm elapsi tum instantis anni, digniſſimis Procancellariis pro sua erga me propensa comitate, benevolentiâ, favore quas possum maximas debeo, ago, habeo gratias. Ità qualitercunque persoluto gratæ commemorationis debito, de meipso forsan expectatis, ut nescio quid edifferam; quibus præsertim causis inductus priori isto me abdicârim munere, novum hoc denuò assumpserim; quippe cùm propterea ceu desultoriæ levitatis, aut fluxæ fidei homo, mei decoris nimiùm incuriosus, vestrique parùm reverens arguar forsitan aut insimuler à quibusdam; quos tamen (si qui sunt) rectiùs facturos autumo, si judicii sui acrimoniam maturiori consilio temperent, nec alieni animi statum Lesbiâ sortis regulâ metiantur; cùm

ſubinde vel firmiſſimæ rupes reciprocos æſtus ſubeant, & conſtantiſſimi plerique viri variis rerum vicibus exagitentur. Rem ipſam quod attinet; Græcam ego provinciam, nemini ſanè tunc optabilem, & immane quantum laboris exiguâ, imò nullâ, mercede compenſantem qui renitenti animo ſuſcepiſſem, cùm in meliùs demutatâ loci conditione plures augurarer futuros, qui id muneris cùm aggredi vellent lubentiùs, tum digniùs exequi poſſent, nil planè quicquam obſtare deprehendi, quo minùs, nullo veſtro incommodo, genio meo prorſus obſecundarem; permoleſtum onus leviculo penſo commutarem, è Grammatico piſtrino in Mathematicam palæſtram me ſubducerem. Etenim ſicuti nunquam à Philologia prorſus abhorruerim, ità nè diſſimulem philoſophiam ſemper impenſiùs adamavi; ut vocularum ludicrum aucupium morosè non deſpiciam, ità ſeriam rerum indaginem magis cordicitus amplector; omnis tædii non uſquequaque impatiens, modici verò otii appetentior ſum; omni verſus alios injuriâ ſic abſtinere ſtudeo, ſalvum ut velim mihi legitimum mei arbitrium; voluntatis denique veſtræ cùm obſervantiſſimus perſtiterim, & ſtudioſiſſimus digni-

dignitatis, libertati tamen meæ nunquam renunciâram penitus, non insolubili servitutis nexu dominæ me Grammaticæ obstrinxeram, nec aures ultro meas Linguis obtuleram perforandas, ut non licuerit honestam occasionem arripere memetipsum emancipandi, nedum ut debuerim amicis, ad munus invitantibus, minùs equidem honorificum, at multo commodius, genio meo acceptius, & liberali otio abundantius, refragari. Quid multa? jure meo usus sum, non alienum invasi; possessione meâ decessi, neminem extrusi suâ; honore meipsum exui meritum meum excedente, non indignâ quenquam affeci contumeliâ, nedum ut vobis, charissima mihi colendissimáque capita, dedecus inferre meditarer, quos promissimo semper affectu complexus, devotissimo cultu adveneratus sum, quorúmque honori, siquis alius, pro exili modulo virium, cupidâ mente, promptâ operâ, dictis factisque nunquam non attentissimum me præstiterim, addictissimum demonstrârim. Nec è consuetudine vestrâ longè mihi dulcissimâ exoptatissimâque, nisi sonticâ quadam necessitate adactus, præduráque constrictus inopiâ vel ex parte recessissem. Nullis certè machinis impulsus

pulsus à vobis divelli penitus, nullis conditionibus allectus perduci poteram, ut è vestris omnino castris transfugerem; neque sub aliis uspiam gentium quàm insignibus vestris militavi. Quinimò non tam fines vestros dereliqui, quàm ditionem prolatavi, nomen vestrum protuli longiùs, haud ignominiam vobis accersivi; neque tam sponte meâ demum, quàm fato quodam abreptus videor futuri provido, præsagóque, ut in alia quadam obscuriore arena, quod in hoc celebri circo nunc inituras sum, certamini præluderem. Me quisquis igitur hanc ob rem ceu perfidum desertorem aut fugitivum mancipium sugillat inclementius, viderit ipse quàm justas, quámque probabiles iræ suæ causas prætexat. Utcunque nequeo non effusâ mihimetipsi cum lætitiâ gratulari, tot erroribus defunctus, tot ereptus fluctibus, tot vicissitudines permensus quòd in hunc tandem placidissimum portum appulerim, in hac tutissima statione requiescam; nec enim fere votis meis congruentius quicquam potuisset evenire, quàm in almæ matris sinu, omnimodis innocuis deliciis refertissimo, in vestro (hoc est hominum indole perquam sincerâ, candidóque pectore, sublimi captu, & excel-

lente

lente doctrinâ præditorum) Regibus, opinor, ipsis invidendo consortio; in pulcherrimo Musarum palatio, sanctissimo templo virtutis, amplissimo bonæ mentis gymnasio, illustrissimoque præstantium exemplorum theatro; ingenio expoliendo, moribus efformandis, componendis affectibus, liberalibus scientiis unà vobiscum condiscendis intentum; satis honestâ nec admodum onerosâ servitute mancipatum vobis, & minimè aspernandâ conditione perfruentem ætatem agere; id quod sanè, libera modò concedatur optio, centies malim quàm aut aulicas inter pompas, aut tumultus urbanos, aut rusticas solitudines, in re quantumvis lauta, quibuscunque seu copiis affluens, seu diffluens voluptatibus, seu titulis insignitus commorari & consenescere. Quam proinde felicitatem, non sine propitii numinis, meis meorúmque rebus per superas istas calamitates gravissimè afflictis benignè providentis, singulari miserordia mihi concessam, quâ par est ergo divinam majestatem humili reverentiâ, ac piâ mentis devotione percipio. Tum verò optimorum virorum ambitu nullo conciliatam, nullâ solicitatam prece, sed purissimâ sponte mihi delatam benevolentiam

grato

grato ſenſu mentis amplector, & agnoſco; cui cum nequeam omninò parem, hanc ſaltem adnitar referre gratiam, ut efficiam ſcilicet quadantenus, demandatum mihi officium gnaviter exequendo, nè aut collati in me beneficii pæniteat ipſos, aut concepti de me pudeat judicii. Quod non eò dico quaſi tenuitatis meæ parùm conſcius ſim, aut aliquid arrogem mihi (quum imbecillitatem propriam intimè ſentiam, indignitatem palam confitear) at quò ſtimulos addam induſtriæ meæ, labantem animum ſuſtineam, auctor fiam mihi ipſi, nè deſperem ingenii mei defectum ſtudio ſupplere, quódque ab uſu mihi deeſt curâ compenſare. A vobis autem, Ingenui quotquot eſtis literarum alumni, nihil non ſpero, non polliceor mihi candore veſtro, veſtrâ humanitate digniſſimum; nec ullatenus addubito, quin & faventibus me votis hactenus proſecuti, nunc & alacri porrò gratulatione ſitis excepturi; minimè ſcilicet immemores, quam ante plures olim annos indicâram bonæ voluntatis Mathematica hæc ſtudia ſeu in exilium procul ablegata revocandi, ſeu profundis tenebris demerſa in apricum retrahendi. Enimverò ſi tunc privatus homo nec alioquin obnoxius,

& ſolâ rei pulchritudine accenſus, ità me comparaverim, ut ſcientias iſtas qualicunque ſtudio meo vobis exoptáverim ſummopere commendatas, non eſt quòd nunc ambigatis pro ratione publici muneris, & ſanctiori vinculo conſtrictum, iis pro tenui facultate mea promovendis acriùs incubiturum, quando nimirum quò tum propendebam animo, eò jam propellar officio. Quod autem à me jam leges diſtrictè poſtulant, id quovis injuſſu præſtare quàm liberrimè ſemper fui paratiſſimus, ad familiares vos congreſſus ut non modò promptè admitterem, verùm ultrò cupidè invitarem; útque non ſemel tantùm vel bis quâlibet ſeptimanâ cubiculi fores aperirem, ſed vel intimi cordis indies penetralia recluderem, & patulum adituris pectus exhiberem. Quin accedite ſultis jugiter, adoleſcentes ſtudioſi, nullo metu cohibiti, nullo pudore retardati; quod jure veſtro poteſtis, & me facietis haud invito, imò adlubeſcente gaudentéque, conſilium audacter expetite, exigite, præcipite & imperate, juſſis utique veſtris non averſum me vel refractarium, ſed officioſum atque morigerum perceptúri. Siqua vos ſtudii Mathematici ſalebroſum iter ingredientes obſtacula præpediant, difficultates

ficultates avertant, dubiis remorentur, facite me, obtestor, participem, illud omne (quousque vel usu valeo vel industriâ consequi possum) quicquid est offensionis submoturum. Hisce verò disciplinis ut strenuam navetis operam, inque pulvere Mathematico haud segniter desudetis, si nil aliud impelleret, illud saltem honestarum mentium vos calcar extimulet, inflammôtque vehementiùs qui generosis semper animis altè insidet ardor illustria quæque exempla persequendi. Nam ut veteres illos præteream, mirificum Pythagoram, sagacem Democritum, divinum Platonem, subtilissimum prudentissiméque doctum Aristotelem, quos nimirum omnis hactenus ætas agnovit & suspexit meritò sapientiæ antistites, artium coryphæos; quorum quantopere judiciis arriserint hæc studia cùm luculentæ proclamant historiæ, tum ipsorum arguunt præclara monumenta Mathematicis passim interspersa ratiociniis, Mathematicis exemplis, ceu stellis, illustrata; quæ proinde frustrà speret quispiam non in hisce literis mediocriter versatus penitus intelligere, vel illorum abditos sensus non adhibitâ clave Mathematicâ reserare. Ecquis enim Aristotelicum nisi

plectro

plectro Mathematico feliciter organon pulſet; aut ad philoſophi phyſicas auſcultationes Geometriæ ignarus non prorſus obſurdeſcat? quis Platonicum Socratem capiat expers (Geometriæ dicam an) Arithmeticæ de quadratis numeris vel cum puerulis balbutientem; aut ipſum aſſequatur Platonem nedum de mundo ad Geometricas ratione conformato, ſed de Rep. diſſertantem, & politicas etiam leges ad Mathematicam amuſſim exigentem? nec ut recentiores illos commemorem acumine ſimiles antiquis, & prope pares, Gal[illæ]um, Galſendum, Gilbertum, Merc[enn]um, Carteſium, quóſque alios præſentis ævi fert fama Matheſeos unico fretos ſubſidio naturalis ſcientiæ pomœria priſcos ultra terminos extendiſſe; ad quorum ſcripta, Geometricorum diagrammatum radiis ubique collucentia, harum rerum imperiti, ceu ad ſolis lumen coruſcantis noctuæ, exhorreſcunt. Quin ad illas potiùs ſcientias, quales hodie ſe oſtentant conſpiciendas obtutum dirigite, magnatum purpurâ redimitas, principum ſe titulis venditantes, ipſorum regum ſolliis inſidentes; neminis ferè generoſâ ſtirpe prognati, qui vel ingenii laudem ambiat,

aut

aut operam philosophiæ seriam devoveat, non opinione magnifactam studio quæsitam, præconio celebratam; quos omnes in genere quolibet ingeniuæ literaturæ indecorum sit æquiparari vobis, turpissimum antecellere. Præsertim cùm Universitatis quod profitemini nomen adimplere, decúsve sustentare non aliâ ratione valeatis, quàm si omnigenæ scientiæ liberali ingenio dignæ non vulgarem vobis peritiam vindicetis; & nisi vel invidentibus felicitati vestræ, vel famam æmulantibus ansam detrahatis obtrectandi, quòd vel in linguis ediscendis ceu semper infantes ætatem conteratis, vel ex obsoletæ vetustatis ruderibus putidas fabellas eruentes veritatis indagandæ curam respuatis; vel inconsultâ rerum naturâ, sinceræque rationis usu posthabito verborum inanes phaleras, & fucati sermonis præstigias affectetis; vel sophisticis demum tricis, & futilibus argutiis impliciti, steriles rixas conserentes, lubricis inhærentes conjecturis, & incerta dogmata ventilantes otium abutamini, operam ludatis, ingenia miserè vestra vexetis & torqueatis. Quæ in vos (improbè fateor & immeritò, sæpe tamen & seriò) congesta opprobria vel eluatis facilè, vel omnino devitetis, divinam

nam modò Matheſin quâ par eſt diligentiâ conſectemini: Matheſin, ſubtilitate non ſpinoſâ, difficultate neutiquam perplexâ, diſquiſitione minimè contentioſâ ſtudioſos animos exercentem validè, non vanè deludentem, non anxiè diſcruciantem; ſine pugna vincentem, ſine pompa triumphantem, abſque vi cogentem, citra jacturam libertatis abſolutè dominantem; non imbecillæ fidei ſubdolè ſtruentem inſidias, ſed armatæ rationi apertum Martem inferentem, integram palmam extorquentem, inevitabiles cætenas injicientem; quot verba, tot fundentem oracula; quotque opera, tot miracula patrantem; nihil effutientem temerè vel ineptè molientem; ſed univerſa perſpicuè demonſtrantem, promptè peragentem; non ſcientiæ fallaces umbras obtrudentem, ſed ipſiſſimam animo ſcientiam ingerentem, cui adhæreſcat firmiter, quam continuò poſſideat, à quâ nunquam aut ſponte ſuâ deceſſat, aut ullâ vi depellatur: matheſin denuò, principiis menti claris, experientiæ conſentaneis ſuffultam, certas concluſiones elicientem, utilibus regulis inſtructam, jucundas quæſtiones enodantem, mirabiles effectus producentem; artium, penè dixiſſem omnium, fœcundam

parentem, scientiarum inconcussam basim, in rem humanam emergentium commoditatum uberrimam scaturigivem; cui saltem uni æquum sit, ut præcipua vitæ oblectamenta, præsidia salutis, incrementa fortunæ, compendia laboris accepta referamus. Quod eleganter & commodè habitamus, decoras ædes extruimus nobis, augustæ numini delubra statuimus, admiranda posteris monumenta relinquimus. Quòd tuti ab hostili incursione vallis protegimur; arma dextrè tractamus, aciem scitè disponimus; arte quâdam, non furiâ rabie belligeramur. Quòd secura per infidos fluctus commercia transigimus; recta per cæcas maris vias itinere progredimur, incerto ventorum impetu propulsi designatos ad portus pervenimus. Quòd rationes nostras verè subducimus; censum familiarem rectè conjicimus, negotia versamus expeditè; numerorum dispalatas phalanges in ordinem redigimus, tabulis includimus, calculo supponimus; arenarum quamlibet ingentes cumulos, imò vel immensas atomorum congeries facilè computamus. Quòd agrorum fines pacificè dispescimus, momenta ponderum æquâ lance perpendimus, justâ suum cuique mensurâ dispensamus. Quòd

vastas

vastas hinc inde suſque deque quò volumus levi digito moles protrudimus, & immanem rerum perpusillâ vi resistentiam profligimus. Quòd terreni faciem orbis delineamus accuratè, rémque mundi publicam nostro simul universum conspectui subjicimus. Quòd temporis fluxam seriem aptè digerimus; rerum vices agendarum debitis intervallis distinguimus, tempestatum varios recursus, annorum & mensium statas periodos, alterna dierum & noctium incrementa, dubia lucis ac umbræ confinia, exquisita horarum & minutorum discrimina, ritè percensemus & internoscimus. Quòd radiorum solarium in usus nostros subtilem efficaciam derivamus; visûs sphæram in immensum exporrigimus, vicinas rerum species ampliamus, semotas adducimus, occultas detegimus, latebris suis naturam excutimus, & sua callidè dissimulantem arcana revelamus. Quòd concinnis simulachris oculos nostros oblectamus, artificia naturæ peritè æmulamur, opera pulchrè exprimimus: æmulamur dixi? imò superamus; dum nusquam existentia jucundè effingimus, absentia sistimus nobis, præterita repræsentamus. Quòd harmonicis concentibus animos reficimus, aures

emulcemus; aërei fluctûs inconſtantiam certis modulis attemperamus; arido ſtipiti feſtivam vocem indimus, & à rigido metallo dulcem elicimus facundiam; non diſſonâ laude concelebramus Deum, & beatos cœlitum choros haud abſurdè imitamur. Quòd inacceſſas nubium ſedes, diſſitos tractus terrarum, devias æquoris plagas, elatos vertices montium, radices infimas vallium, profundas marium voragines, abſtruſos telluris receſſus attingimus & perſcrutamur. Quòd ipſos mente ſuperos accedimus, imò ſuperos admovemus nobis; æthereas arces conſcendimus, per cæleſtes campos liberè ſpatiamur; aſtrorum emetimur magnitudines, interſtitia definimus; leges ipſis præſcribimus inviolabiles cœlis, & vagos ſyderum circuitus ſtrictis cancellis coercemus. Quòd mundanæ denique machinæ portentoſam molem animo comprendimus; opificii divini ſtupendam pulchritudinem rectiùs æſtimamus, ſapientiùs admiramur; noſtræ mentis incredibilem vim & perſpicaciam certis experimentis addiſcimus, ut pio affectu agnoſcamus. Ut omittam rationem noſtram in palæſtra hac Mathematica cùm ad validè intorquenda argumentorum tela, tum ad cautè declinandos

ſophiſ-

ſophiſmatum ictus; tam ad nervosè diſſerendum, quàm ad ſolidè dijudicandum, ad promptè inveniendum, ad rectè diſponendum, ad perſpicuè explicandum utiliter excitari. Nec non ad attentæ meditationis perferendum tædium, ad alacrem cum objectis difficultatibus conflictum, ad pertinacem in ſtudiis ſolertiam uſu componi mentem, robore confirmari; quinetiam hiſce diſciplinis aſſuefactam à credula ſimplicitate penitus liberari, contra ſcepticam vanitatem fortiſſimè muniri; à temeraria præſumptione validè cohiberi, ad debitum aſſenſum facillimè inclinari; legitimæ rationis imperio perfectè ſubjici, iniquæ fallacium præjudiciorum tyrannidi contumaciter obluctari. Inſtabilem porrò phantaſiam hâc veluti ſaburrâ librari, hâc fluctuantem anchorâ retineri; obtuſum ingenium hâc cote exacui, luxurians hâc falce caſtigari; præfervidum hoc fræno reprimi, torpidum hoc ſtimulo excitari. Nullâ clariùs lampade per naturæ caliginoſas ambages, nullo certiùs filo per intricatos philoſophici labyrinthi anfractus incedentium regi veſtigia; nec aliâ demùm bolide veritatis fundum felicius explorari. Nè dicam quàm variâ per-

cognitarum rerum ſupellectile ditetur, quàm multiplice poliatur ornatu, quàm ſalubri pabulo nutriatur animas, & quàm ſincerâ voluptate perfundatur. Sin præterea dicam, dum à materiâ ſenſibili mens abſtrahitur & attollitur, puras formas diſtinctè ſpeculatur, pulchras ideas concipit, congruas proportiones inveſtigat, ipſos mores corrigi ſenſim & concinnari, affectus componi & compurgari, phantaſiam ſedari ac ſerenari; ad diviniores intellectum contemplationes erigi atque excitari, nec ſolus id nec primus dixero, ſed maximorum in philoſophia nominum ſententiam meam autoritate defendero, ſuffragiis confirmavero. Dies me, vox, & ſpiritus deficerent vel ſumma rerum capita curſim perſtringentem. Nam illius quæ cœlos, quæ terras, quæ maria pervagatur & permetitur, ſcientiæ nulla juſtè limites deſcribat, nulla plenè complectatur utilitates, nulla perfectè laudes exhauriat oratio. Et alioquin ix re decantatâ ab omnibus, vobíſque, reor, ſatìs intimè perſpectâ, improbè deſipiens ſim, ſi aut meam immoderatiùs abutar operam, aut veſtram importuniùs exagitem patientiam. Quanquam haud abs re, nec præter inſtituti

mei

mei rationem feciſſe videor, quòd veſtram modò patientiam ſtrenuè exercuerim; cùm ipſâ patientiâ nulla ſit ad Matheſin aut aptior aut utilior introductio, nec alius quiſquam ſit ad has diſciplinas optimè comparatus, quàm cujus aures, orationis nec inſipidæ faſtidio devictæ, nec jejunæ tædio delaſſatæ, per integrum ad minus bihorium, toleranter ac obſtinatè, vapulare didicerunt. Orationis meritò dixi jejunæ, eóque magìs tempeſtivæ (quis enim ab eſu mutorum piſcium evadat eloquens, aut immunis culpæ ſermone jam luxuriet?) quam ſi vobis ſcîero vehementer diſplicere, facilè me conſolabor, imò magnopere congratulabor mihi, validum indè deducturus argumentum, certum augurium deſumpturus, quòd optimum me hodie præſtiterim Mathematicum, hoc eſt peſſimum Oratorem. Dixi.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

MAthematicas ſcientias pro muneris inſtituto tractaturus, antequam ipſarum ingrediar penetralia, in veſtibulo pauliſper conſiſtam, iiſque qui ad hæc ſtudia minùs accedunt parati ſeu morem geſturus, ſeu gratum opinor, facturus eo ſpectantia generalia quædam ἐξωτερικὰ prælibabo. Id quod, omnibus prætermiſſis ambagibus, continenter aggrediar facere, hac ferme methodo. Primum de nomine paucula diſſeram, tum de objecto ipſarum, & indè ſubnaſcente partitione; proximè de modo verſandi circa objectum, hoc eſt ejus proprietates inveſtigandi & demonſtrandi (ubi de principiis quæ aſſumunt; de propoſitionum quas eliciunt differentiis; de methodo duplice demonſtrandi per analyſin, & ſyntheſin, æque

déque aliis affinibus materiis se præbebit occasio disquirendi.) Postremò de ipsarum origine, progressu, incremento nonnulla forsan historica subjungam.

Nomen primò quod attinet, cùm disciplinæ vocabulum, ex proprio & primario significatu, commune videatur scientiæ cuilibet acquisitæ, & discere nihil aliud vulgò sonet, quàm in rei, quam ignoravimus, notitiam devenire; (quo sensu Sextus Empiricus contra quaslibet artes pervulgatas (Grammaticam, Rhetoricam, Logicam, & cæteras) disputationem instituens, libros inscribit suos contra Mathematicos; nec non præcipui auctores τὰ μαθήματα, & τὴν μάθησιν pro quavis doctrina usurpant. Plato. Οἱ φύσει λογιστικοὶ, εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται: *Qui ad computandum naturâ bene comparati sunt, ad quidvis discendum promptos se exhibent.* Aristoteles. Πᾶσα διδασκαλία, ἢ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ, ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. Apud eundem in Politicis habetur μάθησις ὀψοποιικὴ opsonia conficiendi disciplina. Sed quid ista, cùm sexcenta passim occurrant talia?) Unde igitur hæ scientiæ peculiari modo nuncupantur Mathematicæ, hoc est, disciplinales; & τὰ μαθήματα, per disciplinam comparatæ scientiæ (nonnunquam singulariter τὸ μάθημα, ut Aristoteli: ἥδ, inquit, τὸ περὶ τῆς ἱερῶς τὸ μὲν γὰρ ὅτι φυσικοῦ εἰδέναι, τὸ δὲ διότι Ὀπτικοῦ, ἢ ἁπλῶς, ἢ κατὰ τὸ μάθημα) *Iridis rationem Optici est ostendere, vel simpliciter à se, vel ex Mathematica scientia* (Geometriam innuens, ex qua Opticus suarum conclusionum rationes desumit)

7. *de Rep.*

2. *Post. Anal. initio.*

Lib. 1. *Polit. cap.* 7.

1. *Anal. Post. c.* 13.

sumit) denique per metonymiam quandam actionis pro objecto frequenter appellantur, ἡ μάθησις, disciplina? quamobrem, inquam, istæ scientiæ his nomenclaturis insigniantur, ambigitur, & plures, aliæ ab aliis, adsignantur causæ. Quidam propter ipsarum eximiam evidentiam, certitudinem & constantiam hoc nomine donatas arbitrantur, cùm alia nulla cognitio, qualitatibus istis destituta, disciplinæ nomen mereri videatur; nec videri debeat quispiam aliquid didicisse, quod non & clare percipiat, & firmiter amplectatur, & * pertinaciter retineat. Qui velut in tenebris palpat, aut opinione fluctuat, || aut à sententia dimoveri potest, haud quaquam didicit. Itaque cùm conditiones istæ scientiis, quæ dicuntur, Mathematicis vel solis vel excellentiori modo conveniant, propterea volunt istis disciplinarum titulum adpropriari meritò. Alii sic denominatas idcircò putant, quòd non adeò sint obviæ, sed præcipuæ difficultatis aliquid contineant, & proinde Magistri cujusdam præeuntis, vel interpretis opem desiderent; & impensiori quadam attentione ac studio debeant addisci. Juxta Platonis illud: Οὐδεμία πόλις ἐντίμως αὐτὰ ἔχει (mathemata scilicet) ἀσθενῶς τε ζητεῖται χαλεπὰ ὄντα, ἐπιστάτην τε δέονται οἱ ζητοῦντες, ἄνευ τοῦ οὐκ ἂν εὕροιεν· *Nuspiam in pretio sunt, & languidè illis incumbitur, propter difficultatem, & quia duce opus est studiosis, absque quo non assequantur.* Proclus verò (sub finem primi in primum elementum commentarii) hujusmodi videtur rationem adsignare (quam ideò præsertim refero, quoniam acerbiùs carpi, quàm penitiùs intelligi solet

* Δεῖ τὴν ἁπλῶς ἐπιστάμενον ἀμετάπτωτον εἶναι. *Arist.*

|| 1. *Post. Anal. c.* 2.

7. *de Rep.*

ſolet à nonnullis) ſcilicet cùm triplex ſit modus (ex ipſius ſententia) ad rerum cognitionem perveniendi; per impreſſionem forinſecus accedentem, per interiorem motum phantaſiæ; pérque diſcurſivam operationem mentis in ſeipſa reconditas ſpecies eruentis, & quaſi ſopitas excitantis; quorum primus ſenſio, ſecundus opinio dicitur, tertius appoſitè vocari poteſt diſciplina; utpote quædam ἀνάμνησις (vocabula verò μανθάνειν & μιμνήσκειν ab eadem videri poſſunt origine profecta, & ſignificatu cognata) & quia μάθησις utcunque talem notitiam propriè reſpiciat, ad quam arripiendam nedum idonei, ſed quodammodo parati accedimus; ex prævia quadam, ſubobſcura licèt, ediſcendæ rei notione. Quo caſu ſibi Mens quaſi magiſtræ defungitur officio, ſeipſam erudiens, ac inſtituens. Hæc autem cognitionem adipiſcendi ratio cùm hiſce ſcientiis præcipuè congruat (quippe quæ ſint ut ipſius Procli verbis utar, κινητικαὶ τῆς γνώσεως, καὶ ἐγερτικαὶ τῆς νοήσεως, καὶ καθαρτικαὶ τῆς διανοίας, καὶ ἐκφαντικαὶ τῶν κατ' οὐσίαν ἡμῖν ὑπαρχόντων εἰδῶν, λήθης τε καὶ ἀγνοίας ἀφαιρετικαὶ, καὶ ἀπολυτικαὶ τῶν ἐκ τῆς ἀλογίας δεσμῶν; hoc eſt, *rerum notitiam promoveant, contemplationem exuſcitent, rationem expurgent, inſitas ſpecies eliciant, oblivionem ac inſcitiam amoveant, erroriſque vincula diſſolvant*) & cùm hæc animadverterent Pythagorei, qui haſce ſcientias vel invenerint primi, vel inprimis excoluerint, idcircò Μαθηματικῶν ὀνομάζουσι Illis nomen indiderunt, propter modum ſcilicet illas inveniendi, & acquirendi diſciplinæ titulo digniſſimum. Ità ferè Proclus, equidem ſubtiliter, & ingeniosè. Verùm

Verùm elegantiùs forsan confícta, quàm veriùs adserta sunt hæc omnia. Nec enim hoc vocabulum (ut nec alia pleraque) tam argutâ ratione conquisitum, quàm ex communi usu, probabili causâ nixo, depromptum videtur. Itaque sic dictas potiùs arbitror has scientias, quia cùm Græci primitus inciperent ad artium studia animum appellere, solæ hæ in Scholis traderentur, quum nec dum aliæ inventæ essent artes, quas ediscerent pueri. Hisce solis, inquam, artibus incubuerunt, nec aliud quid illis innotuit sciendum, exceptâ philosophiâ, quæ non tam discebatur á pueris, quàm à senibus anxiè quærebatur, (nec enim primis istis seculis inter eos, qui ad eruditionis qualemcunque gradum adspirarent, fere repertus est quisquam arrogans adeò, ut sapientiæ se Magistrum auderet profiteri, quíque id primò videntur ausi circumforanei isti Sophistæ justas ideò Socrati pœnas dederunt.) Artes autem aliæ scribendi, dicendi, differendi posteriore temporis decursu subnatæ sunt: Et quidem scribendi ars (Grammaticam intelligo) à plerisque ad ipsum Aristotelem refertur authorem; saltem circa illius tempora sumpsisse videtur initium; quod enim apud Platonem in Philebo γραμματικῆς τέχνης succurrat mentio à Theuth Ægyptio repertæ, id de literarum solummodo descriptione ac usu (utili sanè cum primis, & mirabili artificio) dictum accipio, neutiquam verò de præceptis Grammaticis in artis formam concinnatis, de qua nihil fere quicquam, opinor, Platoni suboluit. Artem verò dicendi (seu Rhetoricen) à Siculis duobus Corace,

race, & Tisia, tantillo ante Platonem tempore, scriptis cœptam consignari ex Aristotele denarrat Cicero; qui tamen ipsi non nisi quædam exilia adumbrásse videntur istius artis rudimenta; id quod ipse subinnuit Aristoteles sub finem libri de Sophisticis Elenchis; de illis verba faciens: Οἱ τὰς ἀρχὰς εὑρόντες (inquit) παντελῶς ἐπὶ μικρὸν τι προήγαγον. Differendi demum ars (Dialectice) ab Eleate Zenone, Socratis contemporaneo ac congerrone, qualecunque (sicuti perhibent) principium sortita, vix tandem Aristotelis operâ (nobis ipse author est) in artis methodum excrevit: Saltem à Pythagoreis & aliis plerisque Platonis antecessoribus philosophis penitus ignoratam & intactam exerte contestatur idem Aristoteles: Οἱ γὰρ πρότεροι (inquit, hoc est Platone antiquiores) διαλεκτικῆς οὐ μετεῖχον. Scilicet in illa studiorum infantia nondum adoleverant artes istæ populares: Nondum venerat illis in mentem è præceptis hauriri posse vel perite scriptitandi, vel eloquendi facunde, vel argutè disputandi facultates; quas forte vel naturâ cuique putabant insitas, vel è quotidiano facilius usu, quàm ex operosa institutione crederent comparari; nec opinione suâ multùm deceptos ipsa ferme coarguit experientia. Omne igitur studium primis istis seculis circa hæc duo occupatum est, Mathemata scilicet & Philosophiam, quorum illa solebant in scholis à peritioribus Magistris teneræ ætati instillari, hæc provectiorum in suis recessibus contemplationem exercebat; illa ad hanc præparabant animos, & viam muniebant. Quo spectare potest, quòd Laertius

1. *Metap. cap. 6.*

tius à Pythagora triplicem memorat conscriptum commentarium, institutivum, civilem, naturalem (γέγραπ), inquit, τοῦ Πυθαγόρᾳ συγγράμματα γ, παιδευτικὸν, πολιτικὸν, φυσικὸν) quo scilicet trino commentario universa temporum istorum doctrina comprehensa videtur: nec ferè dubium est, quin παιδευτικὸν idem designaverit quod μαθεματικὸν; quâ scilicet institutione prævia ad utramque philosophiæ partem, civilem & naturalem, aditum præstruebat ille primus (certè tum primarius) antistes Sapientiæ. Eodemque pertinere videtur triplex illa, quam Gellius tradit, Pythagoricæ doctrinæ gradatio; juxta quam nempe illius instituti sequaces ἀκουστικοὶ primò, proximè μαθηματικοὶ, denuò φυσικοὶ dicebantur; hoc est linguam primò compescere, aurésque exercere, ceu rerum omnium ignari; tum aliquid discere, qualemcunque scientiam captare; postremo sapere, hoc est præcipuarum rerum notitiam indipisci studebant. Huc saltem respexit Plato, quum has scientias τὴν προπαιδείαν, (præviam eruditionem, hoc est philosophiæ quasi præludium) appellat (in politicis); & cùm Platonis Timæo dicitur Mathesis ἡ κατὰ παίδευσιν ὁδὸς (apud Proclum * primo libro). Eóque Xenocrates elegantur Mathemata vocavit λαβὰς τῆς φιλοσοφίας (ansas philosophiæ): Et alius non nemo κλίμακας καὶ ἐπιβάθρα, gradus ac scamna vocat, quibus ad rerum sublimium cognitionem ascenditur; juxta dictum Platonis: Τοῦ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσις ἐστίν· ἕλκον ἄρα πρὸς ἀλήθειαν ψυχὴν εἴη ἄν· καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας,

Lib. 1. *cap.* 9.

7. *de Rep.*

* *Pag.* 6.

7. *de Rep.*

νόιας ; πρὸς τὸ ἄνω χεῖν. ἃ νῦν κάτω, ἐ λέον ἔχομεν. Ex antiquiorum denique ſententiâ Theon Smyrnæus, ille Platonicæ Matheſeôs vetuſtus expoſitor, totam exquirendæ ſapientiæ rationem, per ſacram antiquitus conſuetam myſteriorum perceptionem pulchrè repræſentat; cujus cùm omnino quinque gradus vel partes extiterint, καθαρμὸς, τελετὴ, ἐποπτεία, ἱεροφαντεία, εὐδαιμονισμὸς: Et quidem cùm philoſophia (rationalis nempe, civilis, & naturalis) τῇ τελετῇ, inſtitutioni in ſacris, bene comparetur; Theologia vero ἐποπτείαν, ſacrorum inſpectionem, appoſitè referat; Matheſis τῷ καθαρμῷ, præparatoriæ purgationi, haud incongruè aſſimilatur, quâ minimè imbuti, ceu profani & inhabiles procul arcendi videbantur à myſteriis ſapientiæ. Verùm de his ſatis; ut concludere liceat has ſcientias optimo jure dici Mathematicas (vel τὰ μαθήματα, diſciplinas) quoniam primitus ſolæ diſcerentur: cùm nedum res, at vocabula quoque ſint primò occupantis. Quod imprimis ex ipſa rei veritate nomen obtinuerunt, id poſtea retinuerunt meritò (uſu poſſeſſionem corroborante) utinam non fruſtra retineant, quáque par eſt ſolertiâ à ſtudioſis adoleſcentibus perdiſcantur.

Neſcio vero, de Mathematum nomine dum diſpicio, operæ ne fuerit pretium adnotare turpiſſimum ejus, qui apud Romanos ſequioris ævi ſcriptores, invaluit, abuſum; ut ſcilicet id peſſimo, vaniſſimóque generi hominum Aſtrologis (Aſtromantis potius, vel ἀστρομανέσι) Genethliacis, Conjectoribus, divinis, & iſtius maleſani furfuris reliquis

quis propudiosis nebulonibus attribueretur vulgò. Unde Tacito Mathematici, *Genus hominum potentibus infidum, sperantibus fallax, quod in civitate nostra semper vetabitur, & semper retinebitur.* * Legiturque facta fuisse de Mathematicis Magísque Italiâ pellendis senatusconsulta: [Mathematicis, Magísque; ô dispar conjugium! Simili planè jure, Serpentes avibus geminentur, tigribus agni] Seneca in ἀποκολοκυντώσει Claudiana: *Patere Mathematicos aliquando verum dicere* (genuini Mathematici, ὦ σὺς, nunquam non verum dicunt) *qui illum ex quo princeps factus est omnibus annis, omnibus mensibus efferant.* Sed hujusmodi penes Suetonium, Tacitum, aliósque illius ævi degeneres historicos, sexcenta succurrunt exempla; unde Gellius: *Vulgus autem quos gentilitio vocabulo Chaldæos dicere oportet, Mathematicos dicit.* Quæ vocabuli nobilissimas & honestissimas disciplinas designantis improba profanatio temporum istorum in extremam barbariem impetu citato delabentium crassam demonstrat inscitiam: Siquidem confusio nominum nunquam non rerum arguit imperitiam. At meliori ævo, cùm apud Quirites plus vigeret eruditio melius audiebant Mathematici, quos ab ista fæce circulatorum sibi futurorum præscientiam arroganter solicitè dirimit Cicero: *Num, ait, censes eos, qui divinare dicuntur, posse respondere Sol majórne quàm Terra sit; an tantus quantus videatur; Lunáque suo lumine an Solis utatur? Sc. Sunt enim ea Mathematicorum, non Ariolorum:* Dignum hercle Ciceróne judicium, — *dignum sapiente, bonóque.* Sed de nomine satis dictum superque; nè

1. *Hist.*

* *Annal.* 1.

Lib. 1. *cap.* 9.

De Divin.

philologum potiùs agere videar, quàm Mathematicum, — *iterumque antiquo me includere ludo.* Igitur

Ad rem veniamus, & de Matheseos proximè dispiciamus Objecto; è cujus seu variis speciebus, seu diversimoda consideratione, Mathesis ipsa varias in partes dividitur. Quâ super re primò secundum aliorum placita, communíque ferme sententiæ consona trademus, postea de reipsa disquiremus curiosiùs; & quale reipsâ Mathesis objectum contempletur, quousque se extendat, quomodo disterminetur aut distribuatur in partes, quid nostræ sit sententiæ enucleabimus; nec non omni sepositâ authoritate, quædam subinde παράδοξα, (non adeò fortassè παράλογα) proferemus in medium: Nec enim omnia de trivio petere, vel quidvis temere suscipere constitutum est mihi; sed quæcunque se obtulerint quæstione digna liberè discutere, quæcunque veritati videbuntur consentanea, strenuè affirmare non verebor; vestri tamen candoris & acuminis, quæ dixero cuncta, judicio examinanda & decidenda submissurus. Quod igitur attinet objectum Matheseos generale, prout id vulgo statuitur, mirum videri poterit nullum ei, in utravis lingua, proprium vocabulum congruere. Siquidem ἀκυρολόγως Aristoteles τὸ ποσὸν magnitudinis & multitudinis commune genus constituit. (πλῆθος μὲν οὖν ποσόν τι ἂν ἀριθμητὸν ᾖ, μέγεθος δὲ ἂν μετρητὸν εἴη· *Multitudo quà numerabilis est* ποσόν τι; *& magnitudo, quatenus mensurabilis.*) At verò propriè τὸ ποσὸν quotitatem significat, & solum respicit numerum. E contra quantitas, quo vocabulo

V. Metaph. cap. 13.

cabulo τὸ ποσὸν Aristotelicum exprimere solent Latinè, magnitudinem indigitat, nec ad numerum proprie referri potest. Qui defectus nominis magnitudini & multitudini communis argumento forsan sit nullum illis communem conceptum veterum animis insedisse; an sit ullus ex parte rei, posteà disseremus. Quicquid verò sit de generali objecto, satis convenit Mathesin circa duo potissimùm versari; τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν (strictè dictum), hoc est quantitatem & quotitatem; seu malitis, circa τὸ μέγεθος & τὸ πλῆθος, magnitudinem & multitudinem (continuam alii appellitant, discretamque quantitatem, quàm appositè etiam posthac forsan disceptabimus.)

Quoniam verò species utraque (magnitudo dico & multitudo) duplici pacto considerari potest; vel quatenus ab omni speciali materia, materiæque circumstantiis, & accidentibus mente separatur vel abstrahitur (hoc est in se generaliter, illis omissis, concipitur) vel quatenus inhæret alicui speciali subjecto, cùmque aliis quibusdam physicis qualitatibus, actionibus, circumstantiis conjuncta, & commista reperitur; hinc emergit divisio Matheseos in puram (vel abstractam) & mixtam (sive concretam). Quam & Plato videtur agnoscere (in Philebo); alias enim disciplinas καθαρὰς, πρώτας, ἡγεμονικὰς (Arithmeticam disertè significans, & Geometriam) alias verò ἀκαθάρτους, impuras, secundarias, minùs exactas asserit. Et puræ quidem, vel abstractæ Matheseos partes magnitudinis ac numeri generalem naturam, & proprias affectiones absolutè contemplan-

tur; Mixtæ verò, vel concretæ, considerant easdem, ut certis corporibus & subjectis specialibus applicatas, cum vi motiva & aliis physicis accidentibus copulatas; (unde φυσικοτέρας appellat Aristoteles; & ‖ αἰσθητικὰς; alii Physico-Mathematicas vocitare solent.) Pura consequenter Mathesis duplex statuitur; Geometria, quæ magnitudinis abstractæ naturam speculatur, species distinguit, proprietates investigat; &, Arithmetice, quæ multitudinem, seu numerum, ejúsque species & affectiones pari modo contemplatur & pertractat. Mixta verò Mathesis pro materiæ, cui magnitudo & multitudo inesse possunt, varia specie, vel qualitate differenti multiplex est, nec uno proinde modo seu à veteribus, seu à recentioribus philosophis dispertita est, ut mox ostendemus: interim de modo considerandi diverso quæ diximus exemplo uno, vel altero dabimus utcunque illustrata. Itaque exempli gratiâ; Recta linea, quæ est species magnitudinis, concipi potest vel absolutè, & universalissimè, juxta definitionem ipsius, ut simplicissima dimensio, brevissimum inter duo quæcunque puncta designans intervallum; quo pacto considerata generales quasdam proprietates habet, à Geometra vel præsuppositas, vel demonstratas; aut aliàs; quatenus scilicet. e.g. à centro Solis ad Telluris centrum protensa corporum istorum distantiam signat; vel ut lucis repræsentans radium in hoc corpus impingit, ab illo resilit, per tale medium trajicitur, hinc vel indè deflectitur aut incurvatur; vel ut uno extremo defixa pondus annexum circumferre potest, aut ipsum sustentare;

Auscult. Phys. Lib. 2. cap. 2.

‖ *Anal. Post. Lib. 1. cap. 13.*

tare; ejúſque pro varia ab immobili centro diſtantia, momento determinando inſervire: vel ut chordam materialem, ſeu canonem, repræſentans diviſione ſuâ multiplices exhibere poteſt ſonorum proportiones. Quibus illam variis modis, ſuo quiſque reſpective, Aſtronomus, Opticus, Mechanicus, & Muſicus conſiderant & contemplantur. Simili pacto, Sphæra conſiderari poteſt ut figura talis plani rotatu producta; tali ſuperficie terminata; taliter ſecabilis, aut diviſibilis; certâ ad alias magnitudines homogeneas proportione prædita; quo pacto naturam & affectiones ejus Geometria perſcrutatur: Vel prout in tali diſtantia collocata, per tale medium (uniforme vel difforme) tali lumine colluſtrata talem intuenti ſpeciem exhibet ſui; quomodo verſant illam (aut circa illam verſantur) Opticus juxta atque Aſtronomus: Vel aliter, ut cuivis immerſa materiæ vim obtinet verſus terræ centrum deſcendendi (quam pondus aut gravitatem vocant) pro varia diſpoſitione & ſitu partium, connexione cum aliis materiis, ſuſtentatione vel ſuſpenſione diverſa conquieſcit omnino, vel inclinatur ad certas partes, aut ad talem terminum promovetur; quâ ratione mechanicus illam cogitat & perpendit. Numeros denique alias tractat Arithmeticus, ut ipſorum generales affectiones rimetur; alias Muſicus, ut ipſos ſonorum exprimendis proportionibus accommodet. Sed hæc ſufficiant exempla. Cæterùm iſta, de qua diximus, abſtractio mentalis nedum Mathematicis ſcientiis propria, ſed omnibus ſcientiis eſt communis. Omnis enim ſcientia ſui ſubjecti

jecti naturam speculatur, à specialibus subjectis abstractam; præcepta & theorematáque pote generalia format; genuinas ejus proprietates ab alienis accidentibus disjungit; has pensitat, illas dimittit, e. g. Physice corporis universè sumpti constitutiva principia, materiam & formam, vel simile quid, exquirit; tum communes quibuscunque corporibus affectiones (quantitatem, locum, motum, quietem, hisque affines) persequitur; tum dispescit ipsum in proximè subjectas species; harúmque pariter speciales naturas ac proprietates investigat; de singulis verò corporibus vel individuis, quæ vocant, nihil quicquam satagit, tum quia numero prorsus infinita sunt, & innumeris invicem differentiis distincta, tum quia generatim tradita possunt illis adaptari. Haud secùs Geometria magnitudinem (non huic vel illi corpori peculiarem; cœli nempe, vel terræ, vel maris magnitudinem, sed) universè acceptam sibi proponit excutiendam; generales ejus affectiones (divisibilitatem, congruentiam, proportionalitatem, situs & positionis diversæ capacitatem, mobilitatem, alias quascunque) venatur; quòd ei insint, & quomodo declarat: Tum varias ejus species (lineam, superficiem, corpus) definit, earúmque distinctas proprietates elicit ac demonstrat singillatim; nec non

Πᾶς γὰρ λόγος, καὶ πᾶσα ἐπιστήμη τῶν καθόλου, καὶ οὐ τῶν ἑκάστων. *Arist. Metaph. XI.* 1.

Arist Metaph. XI. 3. Ὁ Μαθηματικὸς περὶ τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν θεωρίαν ποιεῖται· περιελὼν γὰρ πάντα τὰ αἰσθητὰ θεωρεῖ· οἷον βάρος, καὶ σκληρότητα, καὶ κουφότητα, καὶ τὰς ἄλλας ἀσθητὰς ἐναντιώσεις· μόνον δὲ καταλείπει τὸ ποσὸν, καὶ συνεχὲς· καὶ τὰ πάθη τὰ τούτων ᾗ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ, καὶ οὐ καθ' ἕτερον τι θεωρεῖ &c. *Per optimè.*

non has species in alias dirimit contractiores, istarúmque similiter indagat, & probat passiones (idque continuò donec totam sui subjecti propaginem exhauserit, & ad infimas usque species descendendo pertigerit) invenit, inquam, & probat, per universales propositiones, regulas & theoremata legitimo discursu demonstrata: Quæ theoremata utcunque (pro materiæ natura) magis vel minus generalia sibi subjectis singularibus verè & congruè possunt accommodari. Talis (nec alia, quicquid de illa nonnulli mirificè prædicant) videtur vera abstractio Mathematica, qualis nimirum reliquis omnibus convenit scientiis & disciplinis; abstractio scilicet à specialibus & singularibus subjectis; vel consideratio distincta quarundam rationum magis universalium, aliis non consideratis, & quasi neglectis. At de illâ satis: ad Matheseos divisionem distinctiùs evolvendam recedamus oportet; quam tamen, ni fallor, tempus admonet ut in sequentem lectionem reservemus.

LECT. II.

Quam, in superiori lectione, de Mathematicarum scientiarum divisione proponere coepimus disquisitionem, nunc exequi conabimur distinctiùs; aliis placita primo loco, tum quæ nobis videntur, tradituri. Pythagorei (οἱ τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτον, ut ait Aristoteles, qui scilicet e *I. Met. 5.*

Græcis omnium primi Mathematicas scientias attigerunt) non nisi quatuor Matheseos partes agnoverunt, puras ac primarias duas Arithmeticam ac Geometriam; alteras duas mixtas & secundarias; Musicam & Sphæricam (hoc est Astronomiam) cujus divisionis hæc, ex eorum mente, à Proclo redditur ratio, quòd cùm duæ sint objecti generalis species multitudo, & magnitudo; dupliciter autem considerari possit utraque; multitudo quidem simpliciter & quatenus in se subsistens, vel respectivè ad sonos, quorùm exprimit rationes: Magnitudo autem vel prout consistere potest, vel ut motu circumfertur; hinc emergunt istæ quatuor partes Matheseos. Sed ipsum fortè præstet audire Proclum sic enunciantem: Τοῖς μὲν ἓν Πυθαγορείοις ἐδόκει τετραχὰ διαιρεῖν τὴν ὅλην Μαθηματικὴν ὀπτικήν· τὸ μὲν αὐτῆς περὶ τὸ ποσὸν, τὸ δὲ περὶ πλῆκτον ἀφορίζουσι, τὸ τέτων ἑκάτερον διττὸν πεφυκός· Ὁτὲ μὲ ποσὸν ἢ καθ' αὑτὸ τὴν ὑπόστασιν ἔχειν, ἢ πρὸς ἄλλο θεωρεῖσθαι κατ' σχέσιν· Καὶ τὸ πλῆκτον ἢ ἐστὸς ἢ κινέμενον ἔχειν· Καὶ τὴν μὲν Ἀριθμητικὴν τὸ καθ' αὑτὸ ποσὸν θεωρεῖν, τὴν δὲ Μυσικὴν τὸ πρὸς ἄλλο. Eodémque respiciens Boethius, initio Arithmetices, *Illam* (inquit) *multitudinem, quæ per se est Arithmetica speculatur integritas, illam verò quæ ad aliquid, Musici modulaminis temperamenta pernoscunt. Immobilis verò magnitudinis Geometria notitiam pollicetur; mobilis scientiam Astronomicæ disciplinæ peritia vindicavit —. Hoc illud quadrivium est, quo iis viandum sit, quibus excellentior animus à nobilscum procreatio sensibus ad intelligentia certiora perducitur.* Istâ ratione Pytha-

Pythagorei antiquitus Mathematicam diviſerunt; ideò, reor, quia nondum ad alias (Opticam, Mechanicam, & reliquas) appulerant animum; quas nempe poſterioris ævi curioſa ſedulitas, & ὁ πάντων ἐυρετὴς χρόνος peperit ac adinvenit. Cæterùm quid impedit quo minùs de hac ipſa Mathematum quadriga τετρακτὺν illam Pythagoream ex aureis carminibus tantopere celebratam intelligamus? Præſertim cùm admodum futiles abſonæque videantur aliæ pleræque quas interpretes commenti ſunt, eam explicandi rationes. Liceat igitur mihi ſic decantatum iſtum verſiculum enucleare: Ναὶ μὰ τὴν ἡμετέρᾳ ψυχᾷ παραδόντα τετρακτὺν, hoc eſt, Aſſevero per illum (Pythagoram ſcilicet præceptorem noſtrum) qui noſtræ animæ tradidit (hoc eſt, qui nos docuit & præmonſtravit) quaternarium (quatuor diſciplinas Arithmeticam, Geometriam, Muſicam, Aſtronomiam) ſubjicitur πηγὴν ἀενάου φύσεως; id eſt quarum ſubſidio ad altiores ſpeculationes (phyſicas & theologicas) præparamur & diſponimur; vel, ex quibus æternâ veritate præditis ſcientiis tota rerum natura dependet & derivatur (nam ex numeris & formis Mathematicis, ceu principiis, conſtare cuncta, penes Pythagoreos, nemini non notum, ex Ariſtotelis & aliorum teſtimonio). Sed hæc obiter & vix ſeriò.

Ab iſta verò antiquiſſima diviſione Matheſeos nil fere diſtat illa Platonis quinas in partes diſtributio (in Arithmeticen ſc. Geometriam, Stereometriam, Muſicam, Aſtronomiam) ad quas etiam Theon Smyrnæus omnia apud Platonem Matheſin ſpectantia redegit. 7. *de Rep.*

git. Hæc, inquam, divisio Platonica non aliter differt à Pythagorea, quàm quòd in hac Geometria strictiùs sumpta solam ἐμπεδομετρίαν (seu τὴν ἐπιπέδου πραγματείαν, ut isthic habetur, hoc est de planorum dimensione doctrinam) significet; illic verò latiùs protensa totam μετρικὴν (metiendi scientiam) denotet, ipsamque adeo stereometriam comprehendat. Quamobrem verò Plato, eruditionis adeò diffusæ vir, tam angustos Mathesi limites præstituat, nec alias his disciplinas accenseat, indè factum arbitror, quòd aliæ suo tempore necdum inventæ, vel non satis excultæ fuerint, aut saltem nondum in Mathematum censum relatæ. Nec adeò mirum ab Aristotele plura Mathemata (Opticam sc. Mechanicam, Geodæsiam) adnumerari, cùm ista studia pauxillo post Platonem tempore, viguerint admodum, & immensum brevi progressum fecerint, ipsius præsertim Platonis commendatione excitata. Accedit, quòd adscititias istas ipse Aristoteles nunc accenset Mathematicis, nunc illis abjungit, quia nempe medium obtinent locum, nec Physicæ minùs quàm Matheseos sunt participes. Exemplo sit, ubi Opticam dicit Iridis causam reddere ἢ ἁπλῶς ἢ κατὰ τὸ μάθημα, vel absolutè, vel quatenus Matheseos (hoc est Geometriæ) opem adsciscit; Opticam à Geometria districtè secernens: Et porrò subjicit; τὸ μὲν ὅτι τῶν ἀναθητικῶν εἰδέναι, τὸ δὲ διότι τῶν Μαθηματικῶν; scientias sensibiles, qualis optica, distinguens à Mathematicis. Postea verò latiùs exporrectam & succedentium temporum diligentiori studio adauctam, suisque veluti nume-

1. *Anal. Post. cap. 3.*

numeris absolutam Matheſin Geminus (qui circa Pompeii M. ætatem inſignis floruit Geometra) aliique ὁμόδοξοι hoc modo diſpertiebantur, auctore itidem Proclo. Mathematum alia circa τὰ νοητὰ (res intellectu ſolo percipiendas) alia circa τὰ αἰσθητὰ, (res ſenſibus obnoxias) verſari cenſebant; & ad primum quidem genus pertinere duas longè primas & præcipuas partes (τὰ κυριώτατα καὶ πρωτεύοντα μέρη) Matheſeos Arithmeticen, & Geometriam; alteri verò ſex partes competere, Geodæſiam, Logiſticen (id eſt computatricem vel calculatricem) Opticam, Canonicam (id eſt Harmonicam, vel Muſicam) Mechanicen, & Aſtrologiam. Hiſce terminis inclusi, ex his veluti membris coagmentari volebant totum corpus Mathematicæ; quæ membra rursus ſubſecabant in alios minutiores articulos: Geometriam ſcilicet diſpeſcentes in planimetriam, & Stereometriam (Graphimetriam forſan haud male adjeciſſent): Arithmeticen conſimiliter in theorias numerorum lineatorum, planorum, & ſolidorum. Geodæſiam à Geometria diſtinxerunt, eò quòd hæc non mente ſolâ ſpectabiles, ut illa, ſed involutas materiæ figuras, per inſtrumenta quoque materiata, dimetitur: ut (Proclo exempla ſunt) pro conis acervos in acumen aſſurgentes, pro cylindris parietes, itemque per funiculos, amuſſes, perpendicula. Logiſticen pariter ab Arithmetica ſecrevêre, utpote quum hæc non abſtractos numeros conſideret, at rebus ipſis applicet ſenſum incurrentibus; ut cum dato tempore quot ſui circuli partes ſydus aliquod peragat; ad pha-

phalangem instruendam quot requirantur milites; quibus impensis ædes extrui possint, exploratur. Opticam porrò, Geometriæ sobolem (radiosas quippe lineas, & visuales angulos ab illa mutuantem) in tres diffiderunt surculos. Opticam proprie dictam (adspectivam dixeris haud inconcinnè) quæ directu obtutu adspectabilium rationes evolvit (ut quamobrem longiùs excurrentes parallelæ lineæ coincidere videantur, & cur quadratum è longinquo spectatum circuli speciem ostentet): Catoptricam, quæ ex radiis ab opaco corpore repercussis, vel in diversi pellucidi medii transitu detortis resultantes apparentias scrutatur (Catoptricam nempe latiùs accipiunt, ut eam quoque, quæ nunc dicitur communiter, Dioptricam comprehendat, aliud quiddam Dioptricæ vocabulo designantes, ut mox videbimus): Et, Sciographicen (Perspectivam hodie, & Scenographiam, nec non Projecturam, & Projectionum artem appellitant) quæ abaspectabili quovis emissorum radiorum quâlibet objectâ superficie intercepta vestigia delineans, ejus figuram, positionem, distantiam, & reliquas circumstantias congruè concinnéque repræsentat. Canonicam proximè (hoc est Harmonicam vel Musicam) nuncuparunt illam disciplinam, quæ concentuum apparentes rationes dijudicat, & canonis (hoc est regulæ sonoræ) sectione dimetitur, aurium etiam adscito suffragio. Mechanicæ verò, molis corporeæ pondus, & potentiam motivam perpendenti, varias species subjecerunt: Ὀργανοποιϊκὴν, quæ instrumentorum, præsertim militarium, fabricam actusum com-

commonſtrat: Θαυμαστοποιητικὴν, quæ ſpirituum impetu, vel ponderum niſu, vel tenſione nervorum (animales ſubinde motus æmulantium) multa patrat admiranda (ad quam proinde referuntur Pneumatice, Iſormopice, Centrobaryce, Automatopoëtice) &, Σφαιροποιία, confectio Sphæræ materialis cæleſtes circuitus exhibentis. Aſtrologiam denique, quæ mundani Syſtematis ordinem, cæleſtiúmque corporum motus, figuras, magnitudines, diſtantias, influxus contemplatur, partiti ſunt in Gnomonicàm, gnomonum umbris horaria ſpatia diſcernentem; Meteoroſcopicen, elevationum differentias, aſtrorum intercapedines, & his cognata problemata diſcutientem; Dioptricámque quæ per dioptras (hoc eſt inſtrumenta quædam viſuales radios trajicientia, & dirigentia) ſyderum apparentes magnitudines, & intervalla rimatur. Tacticam verò (id eſt aciem bellicam ritè diſponendi facultatem) conſultò rejecerunt, & abjudicârunt Mathematicis diſciplinis, etſi Logiſtices ac Geodæſiæ beneficio legiones ſuppûtet, & caſtra metetur; ſicut nec (arguunt) hiſtoricus idcircò Mathematicus eſt, quia regionum climata refert, aut urbium ambitum edifferit. Ejuſmodi Geminus (aliis adſtipulantibus coætaneis) Mathematum inſtituit partitionem, Pythagoreâ quidem & Platonicâ aliquanto uberiorem, & talem utcunque, quæ præcipuas exhibeat, & complectatur partes, Mathematicarum nomine vulgò donatas; meâ tamen ſententiâ non probam ſatis, aut accuratam. Nam imprimis fundamento nititur iſta diviſio perquam infirmo, lubricóque; Mathematicam

ticam scilicet vel circa res intelligibiles, vel circa sensibiles versari, cùm revera nullum objectum ipsius non simul intelligibile sit, & sensibile, diverso respectu; intelligibile quidem, quatenus universalem ipsius ideam mens apprehendere potest & intueri; sensibile verò, quatenus inest & convenit singularibus subjectis sensum incurrentibus (quis enim non singulas quasque corporum dimensiones oculo perlustrat, attrectat manu?) Nulla verò ratio est, quamobrem generalium doctrina separetur à consideratione singularium, cùm hanc illa penitus includat, & ex primaria intentione respiciat. Cur alia v. g. scientia sphæram intelligibilem tractet, alia sensibilem? Cùm hæ reipsa prorsus eædem sint, & quoad actum mentis subordinatæ; nec intelligibili (hoc est universaliter intellectæ) sphæræ quicquam tribui possit, quod sensibili (hoc est singulari cuivis) potissimo jure non accommodari possit, & congruat perfectissimè. Unde Geodæsiam à Geometria, Logisticen ab Arithmetica perperam disjungi liquet. Verùm stante isto fundamento, saltem accurata non erit, sed manca prorsus & imperfecta reperietur ista partitio; siquidem rerum sensibilium, quibus applicari possint numerus & magnitudo, multo diffusior est copia, quàm ut limitibus istis circumscribantur; unde vel admissâ istâ hypothesi longè latéque patentior evadet Mathematicæ campus; id quod statim clariùs apparebit. Sed de Geminiana partitione satis; quam tamen plerique ferme recentiorum amplectuntur, nisi quòd plures Geodæsiam ac Logisticen hinc exterminent; nomi-

Arist. Met. Lib. II. c. 3.

Ὁ δὲ τὴν καθόλου (ἀποδεῖξιν) ἔχων, οἶδε καὶ τὸ κατὰ μέρος. *Anal. Post. Lib. I. c. 24.*

nominatim Blancanus in libello de naturâ Mathematicarum scientiarum; Petrus Herigonius in antecedaneis ad cursum suum; Guldinus in Prolegomenis ad Centrobaryca, Mathematum divisionem prosequentibus. Duas nimirum puras & primas constituunt partes Matheseos, Geometriam & Arithmeticam; quatuor mixtas & subalternas generaliores, Opticam Mechanicam, Musicam, Astronomiam; quas itidem variis modis in plures subdividunt contractiores particulas. Succurrunt & aliæ, à recentioribus excogitatæ harum disciplinarum partitiones, pleniores aliæ & accuratiores, aliæ graciliores dilutioréſque; quarum sanè vel inire numerum (nedum omnes exquisitè percensere) difficile sit, nec admodum utile, cùm ut plurimùm multiplex illa sectio rerum & subsectio præcisior in partes minutissimas, confusionem potiùs inducat, quàm amoveat (πρὸς γὰρ εἰς τὸ μερικώτερα τεμνόμενον τῷ διδασκαλίαν δυσπερίληπτον ἀπεργάζεσθαι τῷ γνῶσιν, * ut Proclus ait) præsertim cùm earum pleræque omnes iisdem obnoxiæ sint argumentis, quibus ostensum est prædictam Gemini divisionem impugnari. Quare prætermissis istis, rem consulemus ipsam, & nostri quid sit judicii aperiemus. * *Pag.* 21.

Ego sic existimo: Primò, non aliam reipsâ quantitatem existere diversam ab illa, quæ magnitudo dicitur, vel quantitas continua; hanc proinde solam Matheseos objectum meritò reputari, cujus illa generales imprimis proprietates, tum species proximas, & his congruas passiones inquirit & demonstrat. Hoc jam supposito (postea fusius comprobando)

bundo) quod mixtas attinet, quas appellant, Mathematicas, pro naturalis scientiæ partibus omnino habendas censeo; & totidem esse quot ipsa Physice partes agnoscit (nisi quòd plures fortè sint, si merè *πρακτικαὶ* quales Pictura, Sculptura, Statuaria, Architectura, hisque affines artes à Physica discerptæ his adjungantur.) Nec enim hæ mixtæ Scientiæ aliâ ratione Mathematicæ dicuntur, quàm idcircò quod consideratio quantitatis ipsis intervenit; & quòd in Geometria demonstratas (vel propriè demonstrandas) conclusiones adsciscunt & applicant suæ particulari materiæ, quâ ratione nulla pars est naturalis Scientiæ, quæ Mathematicæ titulum sibi non queat arrogare; cùm planè nulla sit, à qua consideratio quantitatis penitus excludatur, adeóque cui non liceat lucis aliquid aut firmamenti de Geometria mutuari. Est enim magnitudo communis affectio rerum Physicarum, corporum naturæ penitus illigata, corporeis omnibus accidentibus permista, & quasi substrata, nec non in effectuum quorumcunque naturalium productione primas fermè partes ferens. Suas quæque corpora figuras obtinent, suas obeunt locales motiones, quarum interventu si minùs omnes, plurimi saltem & potissimi (& quicunque ferè philosophicam explicationem admittunt) effectus peraguntur, quibus determinandis & inter se conferendis Geometrica subinde theoremata deservire possunt & conducere. Quòd si calculum hoc ritu ponimus, & Mathematicam nuncupamus quamcunque doctrinam, Geometriæ adminiculo vel egentem, vel utcunque utentem, eatenus ipsa

Medi-

Medicina Mathematicæ pars erit, quia sicuti notat Aristoteles, ὅτι τὰ ἕλκη τὰ περιφερῆ βραδύτερον ὑγιάζεται, τοῦ ἰατροῦ εἰδέναι, διότι ἢ τοῦ γεωμέτρου. h. e. ex Geometria causam desumit medicus, cur orbicularia vulnera, utpote capaciora aliis, difficiliùs sanentur; & quòd propterea filio suo præcipiat Hippocrates, quo ossium situm, luxationes, contritiones, exemptiones accuratiùs perspiciat, ut Geometriæ incumbat. Politice quoque pari ratione Mathematicis adscribetur, quòd in ornamentum pacis, & salutem in bello protegendam Geometriæ deposcat auxilium; ad ædes nempe publicas eleganter extruendas, urbes validè muniendas, aquas commodè derivandas; nec non ad militiæ munia quævis rectè obeunda, castra locanda, aciem ordinandam, machinas excogitandas, & usui adhibendas, unde Plato: Πρὸς γὰρ τὰς στρατοπεδεύσεις, καὶ καταλήψεις χωρίων, καὶ συναγωγὰς, καὶ ἐκτάσεις στρατιᾶς, καὶ ὅσα ἢ ἄλλα σχηματίζουσι τὰ στρατόπεδα ἐν αὐταῖς τε ταῖς μάχαις, καὶ πορείαις, διαφέρει ἂν αὐτὸς ἑαυτοῦ γεωμετρικός τε καὶ μὴ ὤν, h. e. Latinè: *Ad castrorum metationes, & occupationes locorum opportunorum, & ad acies denso ordine struendas, vel longiùs exporrigendas, cæterásque id genus figuras repræsentandas, quibus disponi debent exercitus in pugnis vel in itineribus, permultum sanè distat, utrum quis peritus sit, an imperitus Geometriæ.*] Unde saltem Tactice, & Poliorcetice, nec non Architectura quælibet adnumerari debeant Mathematicis. Sed ut redeamus ad Physicam, hujus nullam esse partem dico, cui non implicatur quantitas, non applicari possunt theoremata Geometrica;

1. *Anal. Post. c.* 13.

7. *de Rep.*

trica; & quæ consequenter non aliquo modo subalternetur Geometriæ; nec ipsam quæ remotissima videtur, Zoologiam excepero: Quid enim? annon in corporeæ machinæ compage perscrutanda certa membrorum figura, apta proportio, debita positio veniunt considerandæ? non animalium gressus, volatus, natatus, corpora sua cùm promovendi, tum sustentandi, librandique ratio Geometricas ad leges, exigi expendíque possunt? Neque non aliam quamvis naturæ partem talia multa se objecerint examinanti. Haud diffiteor aliquas esse præ aliis partes Physicæ, quarum negotiis seipsam quantitas frequentiùs intermiscet, & quæ proinde Geometriæ subsidium vehementiùs efflagitent; ut nimirum illa, quæ de cælestibus agit corporibus, quoniam ob nimiam à nobis distantiam præter ipsorum apparentes figuras, magnitudines, intervalla, progressus, & periodos motuum nil fere quicquam de illis planè compertum habere possumus; quo fit ut universa fermè scientia syderum videatur Mathematica; quoniam omnis, quam de illis assequi valemus, cognitio quantitatem respicit, aut indè dependet. Hinc Astronomia cum suis partibus, Systematicâ, (quæ principalium corporum mundanorum dispositionem, & situs inter se comparatos indagat) Sphæricâ (quæ communem omnibus cælestibus apparentem motum diurnum, ejúsque conjuncta & accidentia persequitur) Theoricâ (quæ singulorum planetarum motus & passiones indè procedentes contemplatur): Quibus subnecti possunt ex his deductæ vel dependentes Chronologia (vel ejus saltem pars

pars πλάνων) quæ ex ſyderum periodicis curſibus temporum intervalla ritè diſpeſcit ac digerit: Gnomonica, quæ ex opacorum corporum umbris diurnæ revolutionis particulas diſcernit, nec non ipſorum lucidorum altitudines, & declinationes rimatur. Cometologia quoque, déque novis ſtellis extra ordinem aliquando comparentibus agens doctrina huc referantur. Quinetiam, cur diverſorum locorum incolis ſyderum lux quoad moram temporis, aut ſpeciem ſuam, aut ſitum differenter obveniat, quia telluris forma Sphærica prorſus in cauſa eſſe deprehenditur, ideò Geographia quoque Mathematicis accenſetur; utpote cui bene conſtituendæ, intelligendæque Geometricæ de ſphæra concluſiones omnino neceſſariæ ſunt. Iiſdémque pari ratione Nautice (vel ars navigandi) attexitur, quæ ſc. ex angulis cum Meridiano factis navis iter dirigit; & è cæleſtibus phænomenis ejus in vaſto pelago locum & diei tempus determinat. Porrò, quoniam animalis viſio per radios à quovis objecti (lucentis aut illuſtrati) puncto deſignabili, rectarum ad inſtar linearum verſus oculi punctum aliquod ubicunque collatum progredientes effici concipitur, & proinde quæ de rectis lineis (& figuris per illas conſtitutis ſeu comprehenſis) demonſtrat Geometria, radiis iſtis poſſint adaptari; inde in Mathematicum cenſum Optice redigitur, cum ſuis partibus, Optica proprie dicta (quæ directæ viſionis accidentia perluſtrat) Catoptrica (quæ ex radiis ab opaco corpore reflexis provenientes apparentias ſpeculatur) Dioptrica, (quæ radiationis à diverſo medio infractæ

conſequentias elicit.) Quibus adnectuntur ad viſum ſpectantes artes ποιητικαὶ; Perſpectiva, quæ viſibilium objectorum in tabula quavis (præſertim planâ) ſpeciem congruè concinnéque repræſentandi methodum edocet; Graphice, vel Pictura Perſpectivæ colorem & umbram adjiciens; Sculptura, Cælatura, Statuaria, aliæque cognatæ. Quòd ſi perindè comperta foret undulationis aereæ figura, quâ ſonus efficitur, & audiendi ſenſus impellitur, indè nova proculdubiò pars emergeret Matheſeos, Acouſtices nomine celebranda. Haptice quoque, & Geuſtice, & Oſphrantice pari jure mererentur in hunc ordinem cooptari; ſi cujuſmodi motibus peraguntur iſtæ ſenſiones conjecturâ ſubodorari poſſent philoſophantes. Saltem quòd auditum attinet, quoniam ex chordæ ſonoræ certâ ſectione, vel ex duarum pariter tenſarum longitudine juxta certam proportionem differente, ſi plectro feriatur utraque, ſonorum productorum reperitur ſecundum gradus acuminis & gravitatis habitudo determinata chordarum proportioni mirificè reſpondens, & proinde numeris (vel ſaltem rectis lineis) explicabilis, hinc exoritur pars Mathematicæ, quæ Muſica vel Harmonice, vel etiam Canonice dicitur, Arithmeticæ (ſicuti loqui amant) ſubalterna, rectiùs fortaſſis Geometriæ ſubordinanda. Adhæc, cùm vis indita pleriſque magnitudine ſenſibili præditis corporibus verſus terram directè progrediendi, quæ pondus dicitur, ex quacunque proveniat efficiente cauſa, de facto limitetur & gradus ſuos ſortiatur ex conſpirantibus inter ſe partim mole propriâ, partim ſitu partium ſuarum,

rum, partim distantiâ ab immobili centro motûs sui, circa quod rotantur: Et consimili ratione cùm potentia corporibus istis ponderosis resistendi, illa sustinendi, vel elevandi, vel utcunque loco dimovendi determinetur & dependeat ab iisdem causis; hinc disciplinæ de quiete vel motu ponderum istorum seu absolutè, seu comparate (h. e. quatenus sibi mutuò contranituntur) consideratorum (Statice sc. & Mechanice, iisque subjectæ vel annexæ Centrobaryce, Isorrhopice & consimiles) Mathematicis adscribuntur; utpote quæ ad istas magnitudines dimetiendas, positiones determinandas, distantias exquirendas Geometriæ subsidium implorent. Quo referri potest ars αὐτοματοποιητικὴ, organorum nempe non ab extrinseco impulsu, sed ex innexa gravitate, vel elastica virtute mobilium confectio, & consideratio. Imò, quoniam universè motio localis tum quoad durationem, tum quoad impetum, & intensionem; itémque quoad directionem, & quoad omnimodas ipsius differentias haud aliter æstimari potest in se, vel cum altera motione comparari, nisi ex spatiis, hoc est ex lineis rectis aut circularibus, quas describere vel pertransire possit, ideò pleræque partes physicæ, iisque agnatæ artes, in quibus motus localis partes obtinet præcipuas, inter Mathematicas censentur; quatenus linearum (vel spatiorum) adhibent dimensionem, Geometriæ appropriatam; unde Mathematicis accrescit scientiarum fœcunda seges. Hinc enim de motu naturaliter descendentium doctrina, quâ sc. illa proportione accelerantur: de motu projectorum, qui ex naturali & violen-

to componitur, quam lineam curvam describant; de jactu telorum, & missilium tormentis explosorum impulsu, quas vires habeant, & quomodo disponendæ sunt iis inservientes machinæ, destinatum ut scopum feriant validissimè, certissimèque item de aquis per aëris, vel spiritûs impetum (compressione, rarefactione, attractione, evacuatione, vel quacunque causâ) conceptum in sublime evehendis: Quæ, inquam, de his rebus & similibus dispiciunt, scientiæ particulares Mathematicarum amplificant numerum: (quales Belopoëtice, Balistica, Pneumatice, Hydraulice; hísque affinitate conjunctæ.)

E quibus autumo satìs liquidò constare (quod mihi propositum fuerat ostendere) Mathematicam, habitam dictámque vulgo, ipsi Physicæ quasi coëxtendi & adæquari. Nec non simul indicavi (velut obiter, at datâ operâ) quo suo merito quælibet scientia particularis ad Mathematicam dignitatem titulúmque adspiret; & qua ratione Matheseos ambitus eousque excreverit, ut jam (quod de Romana Rep. dictum olim) magnitudine laboret suâ. Quinimò jam effectum, ut in vulgi errorem etiam docti consensisse videantur; atque ut quicquid utcunque diagrammate possit exprimi, velutíque ad sensum imagine propositâ adumbrari, id ad Matheſin, ipso facto, censeatur pertinere. At revera mixtæ illæ vel concretæ scientiæ Mathematicæ, quas vocant, unius Geometriæ totidem potiùs exempla sunt, quam tot partes ipsius Matheseos: Quippe quam post exutas particulares circumstantias, admissásque suas hypotheses fundamentales

damentales & præcipuas. (ſeu probabili ratione nixas, ſeu gratis aſſumptas) evadunt purè Geometricæ. v.g. Poſito ſtellam (hoc eſt punctum aliquod cæleſte) in cœlo (h.e. in ſpatio indefinitè quanto) per lineam rectam, circularem, ellipticam, vel aliam quamvis, deferri motu reſpectu puncti alicujus determinati uniformi, vel apparenter æquali, in certo tempore (h.e. cum certa velocitate per numerorum aut linearum rectarum proportionem determinabili) his, inquam, poſitis, qui conſequitur omnis diſcurſus in Aſtronomia uſurpatus evadit purè Geometricus. Quòque ſimpliciores, & evidentiùs poſſibiles ſunt adſumptæ hypotheſes, eò artes iſtæ ad Geometriam propiùs accedunt: Unde e. g. pars illa mechanicæ, quæ agit de centro gravitatis; & pars Opticæ, quæ vulgò dicitur Perſpectiva, inter Geometriæ partes haud malè numerentur; quia nil fere poſcunt non conceſſum & comprobatum in Geometria; nec aliis utuntur quàm Geometricis aut principiis aut ratiociniis. Verùm de his ſatis pro præſenti inſtituto. At miretur fortè quiſpiam cùm Matheſeos partes omnino cunctas (aut certè præcipuas) recenſere ſtuduerim, quamobrem de Algebra, quam vocant, vel Analytica facultate planè conticuerim. Reſpondeo non temere factum. Quia nimirum Analyſis (eatenus intellecta, quatenus à Geometriæ vel Arithmeticæ pronunciatis & regulis diſtincti quid innuit) non magis ad Mathematicam, quàm ad Phyſicam, aut Ethicam, aut aliam quamvis ſcientiam videtur ſpectare. Eſt enim duntaxat pars quædam aut ſpecies Logicæ, ſeu modus quidam

dam utendi ratione circa quæſtionum ſolutionem, inventionémque vel probationem concluſionum, qualis in aliis omnibus ſcientiis exercetur haud rarò. Quare non eſt pars, aut ſpecies, ſed inſtrumentum potiùs Mathematicæ ſubminiſtrans; ut neque Syntheſis, quæ modus eſt theoremata demonſtrandi analyſi contradiſtinctus, inverſúſque. Sed de his poſthac diſſeremus luculentiùs, cùm de modis inveniendi, ac demonſtrandi Mathematicis agemus de induſtria. Suppar cauſa præſtitit, ut Logiſticen quoque conſultò præterirem; nec inter partes Matheſeos computarem; quia ſcilicet hæc nullum habet diſtinctum, & ſibi proprium objectum, ſed artificium ſolummodo quoddam tradat, in Geometria (vel Arithmetica) fundatum, quà magnitudines & numeros certis notis, vel ſymbolis deſignandi, quà ſummas ipſorum & differentias colligendi ac comparandi. Unde minimè conſtituit partem aliquam Matheſeos a Geometria, vel Arithmetica diſtinctam, ſed in ipſis omnino continetur. At graviorem mihi dicam intendi poſſe ſentio, propter ipſam Arithmeticam (hactenus ſcientiarum habitam ferè potiſſimam) è mathematum quaſi finibus eliminatam; ſaltem omnino prætermiſſam; feciſſe non inficior, at quo jure, quoniam jam opportunè non licet, proximà in lectione diſceptabo.

LECT.

LECT. III.

LEctione præcedente, cùm de Mathematicarum ſcientiarum partitione diſquirerem, quadantenus aſtruxi Matheſin omnem Geometriæ terminis contineri & circumſcribi. Et quidem de reliquis tum memoratis neminem arbitror vehementer repugnaturum, quin ad Geometriam illæ ſatis commodè reducantur. Ipſam verò Arithmeticam quod è Mathematum cenſu diſpunxerim, & nobiliſſimam ſcientiam ſuo, quem tot ſecula poſſedit, gradu quaſi dejecerim, nunc difficilior incumbit mihi provincia cauſas obtendendi probabiles, atque idoneas. Quanquam obteſtari poſſunt me neutiquam id agere, numerorum ut ſcientiam, ſanè pulchram & perutilem, è Matheſi tollam penitus, aut ſecludam. Abſit. Ipſam verò potiùs ut ſede propriâ dimotam legitimum in locum reponam, nativæque Geometriæ, à qua divulſa eſt, ſtirpi rurſus inſeram & coadunem. Quinimò nè tam illuſtri verendæque refragarer auctoritati, adeóque immane vobis paradoxum obtruderem, religio mihi foret, niſi cùm ſuſceptæ cauſæ conſiderem admodum, tum magnopere putarem ex re futurum ipſius Matheſeos, ut Arithmetice Geometriæ nedum naturâ ſimilis & affinis (vel ſoror ejus, juxta vetuſtiſſimi illius Philoſophi Pythagorei Archytæ Tarentini effatum, Ταῦτα τὰ μαθήματα δοκεῖτι ἔμμεναι ἀδελφεὰ)

Apud Nicomachum I. *Arith.*

φιλὰ) ſed intimius conjuncta, imò planè eadem, prorſus indiſtincta habeatur. Etenim evicto numerum (illum ſaltem quem Mathematicus contemplatur) à quantitate, quam vocant, continua nil quicquam reverà differre, ſed ei tantùm exprimendæ declarandæque conflictum eſſe, nec Arithmeticam proinde ac Geometriam circa diverſam materiam verſari, ſed communes uni ſubjecto proprietates utramque pari quaſi paſſu demonſtrare, plurima liquebit indè maximáque in rem Mathe-
I. ſeos publicam commoda derivari. Eo quippe primùm perſpicietur nullum Geometriæ vel axioma generale, vel ſpecialem concluſionem (quæ ſcilicet magnitudines reſpiciant non abſolutè ſumptas at collatas inter ſe juxta certas æqualitatis vel inæqualitatis proportiones, hoc eſt ut menſuris deſignabiles, & comparabiles inter ſe) non etiam Arithmeticæ ſimili ratione convenire: Et viciſſim nihil de numeris affirmari, diſcurſu colligi, vel demonſtrari poſſe, quod magnitudinibus non pariter accomodetur & congruat unde cùm affulſura ſit eximia lux utrique ſcientiæ, tum ingens provenerit compendium, ſublatâ nempe cauſâ theoremata ſuapte naturâ prorſus eadem ſupervacaneè repetendi, plúſque unâ vice demonſtrandi; nec non eadem problemata ſæpius ac diverſimodè ſolvendi; quam ad rem innumeræ produci poſſent inſtantiæ, & tota proportionum doctrina luculento ſit
II. exemplo ſimul & argumento. Quinetiam, hac admiſſâ numerorum & magnitudinum coalitione, locuples utrique diſciplinæ ſuccreſcet acceſſio, lautum accedet incrementum. Etenim permulta, Geometriæ bene-

ficio

ficio & ſubſidio; circa numeros theoremata reperire facillimum erit ac demonſtrare, alioquin intra vulgares Arithmeticæ limites ſiſtendo vix aut nè vix perveſtigabilia, vel demonſtrabilia; permulta quoque breviùs & clariùs hinc inveniri poterunt & demonſtrari. Ac reciprocè numerorum perſpectæ rationes multa Geometriæ theoremata communicabunt perſpicuè explicata, validéque confirmata. Exemplo rem illuſtrabimus uno vel altero. Quod ſumma vel ſeries infinita (ſeu indefinita) numerorum à nihilo creſcentium ad certum maximum terminum, juxta rationem radicum quadraticarum numerorum ſe pariter unitate continuò excedentium (hoc eſt, ſe habentium ut 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, &c. ad infinitum) ſubſeſquialtera ſit ſummæ totidem æqualium dicto maximo termino; eſt arithmeticum theorema, ſed quod in ipſa arithmetica, nullâ, opinor ratione poterit exactè demonſtrari; verùm ex Geometria perſpicuè deducitur. Nam ſi diameter parabolæ cujuſvis in partes æquales diviſa concipiatur indefinitè multas, quæ per puncta diviſionum ad diametrum ordinatim applicantur rectæ lineæ (vel parallelogramma æquè alta illis inſiſtentia) iſtâ ratione progredientur, ſicut oſtenditur in Geometria; ex iſtis verò, ſeu rectis, ſeu parallelogrammis, conflata parabola etiam ibidem ſubſeſquialtera demonſtratur parallelogrammi ſuper eandem baſin & æquealti; hoc eſt ſummæ compoſitæ ex totidem rectis vel parallelogrammis æqualibus maximæ rectæ, vel maximo parallelogrammo: Unde, ſuppoſito quem aſtruere cupimus Arithmeticæ

cum

cum Geometria consensu, satis clarè sequitur ejusmodi seriem numericam subsesqui alteram esse summæ totidem æqualium maximo termino. Sed facilius, nec admodum dissimile, proponemus exemplum. Series, vel summa numerorum ab unitate (inclusivè) decrescentium ad infinitum vel usque ad nihilum, in ratione tripla continuò (hoc est ut 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c.) se habet ad unitatem ut 3 ad 2. vel, eadem series, exclusâ unitate, æquatur semissi unitatis. Hoc theorema (quod facilitatis & perspicuitatis causâ in certâ ratione, triplâ sc. proposui) etsi demonstrari possit * universaliter; multo tamen clariùs opinor, & expeditiùs, pulchriùs saltem & elegantiùs, adhibendo quantitatem continuam sic ostendetur.

* *Sic*;

$Z - 0 . Z - \alpha :: \alpha . \epsilon.$
$Z\epsilon = Z\alpha - \alpha\alpha.$
$\alpha\alpha = Z\alpha - Z\epsilon.$
$\frac{\alpha\alpha}{\alpha - \epsilon} = Z.$

A E F G H Æ Z

Mobile punctum A ponatur ferri per rectam A Z uniformi motu; & punctum E per eandem rectam decurrat etiam uniformi motu, sed velocitate subtripla velocitatis, quâ fertur mobile A. Ergo quo tempore mobile A percurrit rectam A E, eo tempore mobile E percurret ipsius A E tertiam partem, puta E F. Item quo tempore prius mobile percurret rectam E F, eodem posterius percurret ipsius E F tertiam partem, puta F G; & sic continuò in infinitum, donec mobile A assequatur ipsum E in puncto Æ. Posito jam quòd A E sit unitas, erit E F, $\frac{1}{3}$; & F G, $\frac{1}{9}$; & G H, $\frac{1}{27}$; & sic porrò ad infinitum juxta pro-

propoſitam hypotheſin; liquet verò, quoniam mobile A triplo velocius ponitur mobili E, quòd recta AÆ decurſa ab A tripla ſit rectæ EÆ eodem tempore decurſæ ab E. Ergo EÆ ſe habet ad AE, hoc eſt ſeries decreſcens, excluſâ unitate, ad unitatem, ut 1 ad 2: Et AÆ ſe habet ad AE, hoc eſt ſeries decreſcens incluſâ unitate ad unitatem, ut 3 ad 2. Quod erat demonſtrandum. [Generaliter verò conceptum hoc theorema tale fuerit, Series numerorum ab unitate, incluſivè, continuò decreſcentium infinitè, ſeu ad nihilum, in quavis proportione, ſe habebit ad unitatem, ut antecedens (vel major terminus) proportionis ad exceſſum antecedentis ſupra conſequentem. Vel, eadem ſeries, excluſâ unitate, ſe habebit ad unitatem, ut conſequens (vel minor terminus) proportionis ad exceſſum antecedentis ſupra conſequentem. Nam ſuppoſito præcedente diſcurſu, quódque ratio data ſit quæ inter R, & S; & quòd, ut iſthic, AE ſit unitas; quoniam AÆ . EÆ :: R . S. erit dividendo AE . EÆ :: R-S . S. hoc eſt, unitas ad propoſitam ſeriem, ut exceſſus terminorum proportionis ad minorem terminum: Et rurſus, ob AE . EÆ :: R . S. erit per rationis converſionem, AÆ . AE :: R . R-S; hoc eſt, propoſita ſeries, incluſâ unitate, ad unitatem ut major terminus proportionis ad exceſſum ejus ſupra minorem.] Adeò facilè deduci poſſunt ex conſideratione Geometrica Arithmeticæ concluſiones, alioquin ex ſe ſatis intricatæ, & inveſtigatu difficiles. — Alterius ſic Altera poſcit opem res, & conſpirat amicè. Aliud porrò commodum ex hac III.

emer-

emerget conjunctione; quòd exinde ſcilicet evadet perſpicuum (contra quàm haud ità pridem non nemo, magni vir ſed infelicis ingenii, quò Geometrica ſua ſphalmata velo quopiam obduceret, & facilem erratorum elenchum declinaret, haud dubitavit aſſerere) nullum omnino ratiocinium Geometricum valere, non cum Arithmetico calculo exquiſitè conſentiens; & proinde commiſſos in Geometria paralogiſmos poſſe per computationem Arithmeticam ut facillimè, ità certiſſimè, juſtiſſiméque examinari & refutari; nec non veras concluſiones Geometricas Arithmetici calculi Suffragio confirmari, legitimas demonſtrationes illuſtrari; quippe cùm hoc præſtrato & ſtabilito, diſcurſus Geometricus ab Arithmetico calculo nedum diſſentiat, at neutiquam differat. Iſta, ne plura nunc commemorem, in rem Mathematicam emanabunt commoda, ſublato Geometriæ, & Arithmeticæ diſcrimine, vel identitate conſtitutâ & adſertâ. Atqui rem ità ſe habere, fidem penè faciat, validam ſaltem injiciat ſuſpicionem, ipſum Geometriæ nomen (vel generalius illud nomen Metrices, quod præ Geometrices vocabulo Platoni arriſit haud immeritò) quid enim obſecro denotat τὸ μετρεῖν, (metiri) niſi magnitudinem numero notificare, vel exprimere. Μέτρον γάρ ἐστιν (inquit Ariſtoteles) ᾧ τὸ ποσὸν γνωρίζεται· γνωρίζεται δὲ ἢ ἑνὶ, ἢ ἀριθμῷ τὸ ποσὸν, ἢ ποσόν· h. e. *Menſura eſt, quâ quantum dignoſcitur*; dig-

Quoniam Arithmetica inſtrumentum eſt omnis ſupputationis, & numeri ſunt termini, quibus quælibet magnitudo ſignificatur, non dubium eſt, quin per numeros fieri poſſit omnis magnitudinis calculus. Maurolycus in Prolegom. ad Lib. II. Arithmet.

X Metaph. cap. I.

dignoſcitur autem quantum, quà quantum, vel unitate, vel numero. Itaque ſi Geometria nomine ſuo numerum involvit, quidni debeat ipſum reverâ continere? Accedit quod τὸ ποσὸν, quo ſc. unico vocabulo deſignari ſolet univerſale Matheſeos objectum, peculiarem reſpectum includit ad numerum, quod indicio ſit magnitudinis & numeri conceptus vix mente poſſe disjungi, cùm nec nomine potuerint ſeparari. Verum liquidiùs apparebit hoc ex naturâ numeri paulò diligentiùs excuſſâ perpenſâque. Quocirca 1. Adverto, 1.
quòd nullus omnino numerus ex ſe quidquam diſtinctè ſignificet, cuivis determinato ſubjecto conveniat, ullam rem certo denominet. Etenim unuſquiſque numerus quodvis unum quantum æquo jure denotet & denominet: Ac quilibet unus numerus omni quanto pariter attribui poteſt; ut v. g. linea quævis A poſſit indifferenter appellari unitas, duo, vel tres, vel quatuor, vel alterius cujuſvis numeri cognomentum adſciſcere (vel ſi mavis ſimplex, duplex, triplex, vel quomodocunque multiplex dici poterit) quatenus indiviſa manere, biſecari, triſecari, quadriſecari, vel alio quovis modo ſecari poteſt (aut ex quolibet partibus aggregari, ſeu componi) & pari modo quivis idem numerus, ut 5, poteſt attribui quibuſcunque quantis A, B, C, & aliis infinitis, quatenus illa conſtare poſſunt ex 5 partibus. Unde patet numerum quemvis haud quicquam deſignare certi, vel abſoluti, ſed utcunque pro arbitrio aptum natum eſſe cuivis quanto deſignando. 2. Ob- 2.
ſervo, Prout ſinguli numeri ſeorſim & abſolutè ſpectati nihil certi ſignificant, ità duos

(vel

(vel plures) numeros inter ſe collatos nullam ex ſe determinatam habitudinem, ſeu proportionem ſortiri, aut indicare. Ternarius ex. gr. ad binarium nec ex ſe ſeſquialteram, nec ullam aliam certam proportionem indigitat. Sit enim linea A tripalmaris; ex quo A vocetur tres, hoc eſt tres palmi; & linea B bipedalis; unde B nuncupetur duo, hoc eſt duo pedes; liquet iſtum ternarium ad hunc binarium non habere proportionem ſeſquialteram (nec enim ternarius palmorum ad binarium pedum ſe habet ut 3 ad 2) multo minùs aliam quamvis his numeris expreſſam, licèt habeat aliunde. Imò patet binarium iſtum, quo linea bipalmaris denominatur, illi binario, quo bipedalis effertur
3. linea, neutiquam exæquari. Similiter 3. Adnoto, Numeros ex ſe nec invicem addi poſſe, nec ſubtrahi, vel ut ſummam aliquam componant, vel ut exceſſum, ſeu differentiam commonſtrent. Ut in exemplo præcedenti ternarius ille lineam exprimens tripalmarem binario lineam bipedalem repræſentanti, nec adjici poteſt ut conſtituatur ſumma 5 ſeu palmorum ſeu pedum, ſeu cujuſlibet alterius menſuræ, ex iſtorum numerorum ſignificatione notificatæ. Nec ſi ſubducatur ex illo ternario binarius hic, emerget quævis explicita differentia, vel exceſſus dignoſcibilis. Paritérque ſi tres anguli quatuor rectis lineis adjungantur, nulla ſumma conflabitur: Aut, ſi ternarius equorum ex angelorum quinario detrahatur, nulla reſultabit differentia. Unde provenit igitur (dices) numerorum certos ad uſus determinatio? Quòd ipſi definitam innuant rationem, quòd ſibimet addi ſoleant

&

& ſubduci? Reſpondeo, quòd hæc numeris ſubinde conveniant, ex rerum quibus attribuuntur conditione ſuborîri. Nempe ſi res quibus ipſi denotandis inſerviunt, homogeneæ ſint & cognomines, & propterea comparatæ mutuam inter ſe proportionem habeant, adeóque poſſit una alterius adjectione augeri, vel abſtractione diminui, tum ipſas denominantibus numeris ſua impertiunt attributa, eaſdem proportiones, ſimilia incrementa vel decrementa. Ut quoniam linea bipedalis cum linea tripedali congenerem naturam, idémque nomen obtinet, ideò binarius, quo denominatur & ſignificatur illa, ad ternarium quo denominatur hæc, certam innuit proportionem ſubſeſquialteram; eandem ſcilicet quam habent ipſæ lineæ, quas denominant; atque idcirco binarius ille huic appoſitus ternario quinarium efficit (quinos nempe pedes) & ille ſubtractus ab hoc relinquit unitatem, pro exceſſu vel differentia. Eadémque fermè ratione, quæcunque numeris apud Arithmeticos convenire probantur attributæ, numeris illa non tam abſtractis & ex ſe, quàm concretis, & propter rerum, quibus attribuuntur, conditionem conveniunt. Quòd igitur quidam apud nos doctiſſimus, & merito ſuo celeberrimus Mathematicus Geometriam aſſerit Arithmeticæ quaſi ſubordinatam, & Arithmetices univerſalia effata rebus ſuis applicare; item res Arithmeticas altiores eſſe, magiſque abſtractæ naturæ, quàm Geometricas, hâc potiſſimùm ratione fretus; *Quoniam*, inquit, *non eo quòd linea bipedalis addita bipedali facit quadrupedalem, ideò duo & duo faciunt quatuor, ſed potiùs quia hoc, ergo illud*: Reſpondeo, & regero:

D. Wallii Arithm. pag. 69.

Quòd linea bipedalis addita lineæ bipalmari non conficiat lineam vel quadrupedalem, vel quadripalmarem, vel utcunque quaternario denominatam, unde evenit, ſi abſtractè, hoc eſt univerſaliter & abſolutè, verum ſit 2 + 2 conficere quatuor? Dices; quia numeri iſti non applicantur eidem materiæ vel menſuræ: Atqui hoc ipſum volui, ac indè deduco non ex abſtracta numerorum ratione 2 + 2 facere quatuor, at ex conditione materiæ cui applicantur; hoc eſt quia magnitudo quælibet binarii nomine donata magnitudini adjuncta cognomini pariter à binario denominatæ magnitudinem efficit à quaternario denominabilem: Nec certè fingi poteſt quidvis abſurdius, quam magnitudinum proportiones inter ſe à numerorum quibus exprimi poſſunt habitudine dependere. Quanquam alioqui quòd 2 + 2 faciant 4, cùm iſti numeri homogeneis menſuris applicantur, non tam ſcientiæ cuivis Arithmeticæ debetur, quàm ipſorum vocabulorum ſignificationi communi uſu ſtabilitæ, per quam ſc. 4, ſeu voce notatus, ſeu charactere notatus idem ſignat quod bis duo. Sicuti revera totum illud Arithmeticæ vulgaris artificium, quodcunque eſt, non aliunde deducitur, aut aliter demonſtratur; quis enim aliter inferat aut probet, quòd 3 + 5 exæquent 8; vel 8 — 3 relinquat 5, quàm ex iſtorum vocabulorum arbitrario ſignificatu? Sed ut hæc pateſcant ampliùs. 4. Animadverto, rerum quibus attribuuntur numeri magnopere diverſam fore conditionem. Alio nempe pacto tribuuntur numeri rebus quantis certam menſuram (hoc eſt determinatam aliquam magnitudinem,

4.

tudinem, ad quam ejuſdem generis aliæ referantur) deſignantibus, alio autem rebus non niſi genericâ quadam ratione convenientibus inter ſe. Ex. g. cum dico, tres ulnæ; ſingulæ unitates, ex quibus componitur iſte ternarius, æquantur ſibi mutuò, paréſque ſunt ſingulæ aliis unitatibus quemcunque numerum ingredientibus, quo longitudo aliqua ſimiliter ex ulnis compoſita denominatur. Unde tales numeri proportionem ſervant perpetim eandem inter ſe, quam ipſæ magnitudines, quas denominant, iiſque proinde exprimendis appoſitè deſerviunt, atque conducunt. At verò cùm enuncio, tres montes, vel tres angeli, vel tres lineæ, vel demùm tres numeri; nullam habent neceſſariò ſingulares unitates ex quibus componitur iſte ternarius, æqualitatem inter ſe; ac ſaltem convenientiam vel ſimilitudinem quandam generalem in ratione communi montis, aut angeli, aut lineæ, aut numeri. Quando, inquam ex. c. dico tres numeri 5, 7, 9, ſinguli iſti numeri, quatenus illi tres ſunt, rationem habent unitatis, & liquet illos inæquales eſſe, ſed omnes in ratione numeri conſpirare. Sin alter adſciſcatur numerorum ternarius, puta 10, 15, 20; non erit ille prior ternarius æqualis huic ternario. E qua conſideratione duplex emergit quaſi genus numeri, quorum illud appellari poſſit Mathematicum (quoniam ipſum Mathematici præſertim contemplantur, ac adhibent ad magnitudinum dimenſiones exprimendas & comparandas inter ſe; eíque magnitudinum proprietates quadrant, & Mathematicæ concluſiones applicantur) hoc verò tranſcendentale vel

Metaphyſicum; tum quia tribuitur omnibus indiſcretè (etiam ex partibus quantitatis, heterogeneis, imaginariis, privativis; dicimus enim duo puncta, 3 dimenſiones, 4 chimæræ, 5 prædicabilia, 10 cæcitates) tum quia deprehendi poteſt hujuſmodi numerorum aliqua notio, non modò Geometriæ prævia, ſed vel ipſi Arithmeticæ præſuppoſita: Ut cùm dicimus non modò triangulum tribus lateribus concludi; ſed & numerum planum ex duorum in ſe numerorum, ſolidum ex trium in ſe multiplicatione definimus. Unde patet argumenti ſolutio, quo Nichomachus Arithmeticam naturâ priorem Geometriâ conatur adſtruere; quia ſcil. Geometria numeros uſurpare ſolet & neceſſe habet in primis figurarum definitionibus, comparationibus, & proportionibus mutuis explicandis; ut cùm in ea triangulum, quadratum, pyramis, cubus, reliquæque figuræ ex laterum vel angulorum numero definiuntur; & cùm quadratum diametri duplum oſtenditur quadrati ex latere; cùm cylindrus coni æquè alti ſuper æqualem baſim conſtituti triplus demonſtratur; & in ſimilibus: Ex dictis enim promptum erit reſpondere Geometriam, pariter ac ipſam Arithmeticam, quos vel in definitionibus ſuis extruendis, vel in ratiociniis utcunque ſuis enunciandis, adhibet numeros tranſcendentales, eos vel ex uſu communi (penes quem jus eſt & poteſtas numeris juxta ac aliis rebus nomenclaturas affigendi) vel ſaltem ex prima philoſophia mutuari, ad quam pertinet generaliſſimas rationes rerum conſiderare, ac definire; unde videmus multùm & ſæpe agi de numeris in Philoſophi Metaphyſicis.

Quan-

Quanquam alioqui fatendum ſit, perfectam Geometriam & ſuis omnibus numeris abſolutam, Arithmeticâ indigere, veruntamen haud velut ſcientiâ totaliter à ſe diverſâ, ac alienâ, ſed ut parte ſui (ſicut poſtea videbimus) quomodo ad ſtereometriam (doctrinam ſolidorum) quæ pars eſt Geometriæ magìs compoſita, præſternenda requiritur Empedometria (doctrina planorum) pars ejuſdem naturâ prior & ſimplicior.

Nec minùs hinc liquet quid reſponderi poſſit prædicto doctiſſimo viro ſic diſputanti: *Eſt aſſertio illa de æqualitate numeri quinarii cum numeris binario & ternario conjunctis, aſſertio generalis, quibuſcunque aliis rebus non minùs quàm Geometricis applicabilis; nam & angeli, duo & tres ſunt angeli quinque.* Reſpondeo breviter: 1. Ut jam ante, quòd 2 angeli + 3 angeli faciant 5 angelos, provenire non ex abſtracta ratione numerorum, ſed ex eo quòd uterque numerus, binarius ille & ternarius, ejuſdem generis & nominis enti tribuatur. 2. Quòd iſti numeri, quatenus angelis tribuuntur, ſint tranſcendentales, non aliquam ſingulorum angelorum inter ſe æqualitatem propriè dictam, at naturæ duntaxat ſimilitudinem innuentes; adeóque ad Mathematicam conſiderationem minimè pertineant. Cæterum hanc, quam ſubnotavi diſtinctionem numerorum acutè perſpexit, & diſertè prodidit Plato, in Philebo; Recitari merentur ejus verba: Ἀριθμητικὴν — ἆρ' οὐκ ἄλλην μέν τινα τὴν τῶν πολλῶν φατέον, ἄλλην δ' αὖ τὴν τῶν φιλοσόφων; — οὐ σμικρὸς ὅρος, ὦ πρώταρχε. Οἱ μὲν γάρ που μονάδας ἀνίσους καταριθμοῦνται τῶν περὶ ἀριθμὸν· Οἷον στρατόπεδα δύο, καὶ βοῦς δύο·

Pag. 73. Arithm.

Pag. 399. Fic.

δύο· Καὶ δύο τὰ σμικρότατα, ἢ τὰ πάντων μέγιστα· Οἱ δ' ἐκ ἂν ποτὲ αὐτοῖς συναχθείησαν, εἰ μὴ μονάδα μονάδι ἑκάστης τῶν μορίων μηδεμίαν ἄλλῳ ἄλλης διαφορὰν τῇ θέσει· h. e. *Annon Arithmeticam aliam vulgi, aliam Philosophorum statuamus oportet? Siquidem non exigua est discrepantia. Vulgo quippe eorum, quæ numeris exprimuntur, unitates dinumerant inæquales, veluti duo castra, duo boves*; & *duo quævis seu minima, seu etiam maxima omnium. Verùm philosophi nunquam ista assequantur, nisi quis unitatem singulam partium singulæ alteri unitati posuerit æqualem.* Ità Plato numeros istos, ex unitatibus inæqualibus conflatos, ad vulgus rejicit, alios philosophis, hoc est Mathematicis, adjudicat; id quod forsan ex antiquioribus Pythagoreis observatum hauserit; ut innuere videtur Aristoteles, ex illorum, opinor, sententia proloquens: Ἐν γὰρ τῷ Μαθηματικῷ ἀριθμῷ οὐδὲν διαφέρει οὐδεμία μονὰς ἑτέρᾳ ἑτέρας. Ecce Mathematicum numerum, eúmque ex minimè disparibus inter se unitatibus constitutum. Sed ut adhuc rem propiùs attingam; & ipsum controversiæ quasi jugulum petam. 5. Animadverto & assero, Quòd numerus Mathematicus (qualem mox descripsimus, & de quo præsertim sermonem instituimus) etsi possint etiam quæ dicentur per justam analogiam transcendentali quoque numero quadantenus applicari, quatenus naturæ similitudo, est veluti quædam æqualitas, aut affinis æqualitati) quòd, inquam, numerus Mathematicus non sit aliqua res existentiam habens sibi propriam, & revera distinctam à magnitudine quam denominat, sed

Met. XII. cap. 6.

5.

ſed ipſius tantummodo magnitudinis certo pacto conſideratæ nota quædam vel ſignum; quatenus illa nimirum à mente noſtra concipitur vel ut prorſus incompoſita, vel ut compoſita certis ex partibus homogeneis æqualibus (quarum ſingulæ concipiuntur incompoſitæ, & unitatis nomine donantur) vel ut rationem innuens ad alias magnitudines itidem certo modo compoſitas. Etenim ut hunc noſtrum conceptum exponamus, & declaremus, magnitudinem, iſtam certi numeri vocabulo vel charactere deſignamus; qui proinde numerus nihil eſt aliud quam nomen aut ſymbolum magnitudinis iſtius taliter apprehenſæ. Hæc generalis eſt natura, vis, & ratio numeri Mathematici: Verùm ſpecialius quilibet numerus (effabilis aut rationalis quem vocant) diſtinguitur ac internoſcitur ab alio, conſequenter ad actus mentis magnitudines alias atque alias ex una aliqua, quam incompoſitam concipit, per repetitionem ejus (vel ei æqualis adjectionem) continuò ſucceſſivam componentis, aut compoſitam cogitantis. Quæ repetitio primùm mente peracta, tum ſermone prolata dicitur numeratio.

Optimè in hanc ſententiam Ariſtoteles. *Met. XIII. cap. 7.* Ἀνάγκη ἀριθμεῖσθαι ἢ ἀριθμὸν εἶναι τὸ πρόσθεσιν. Οἷον τὸ δυάδα, πρὸς τὸ ἑνὶ ἄλλο ἑνὸς προστεθέντος, καὶ τὸ τριάδα ἄλλο ἑνὸς πρὸς τοῖς δυσὶ προστεθέντος καὶ τὸ τετράδα ὡσαύτως. Ut cùm magnitudinem A mente repeto ſemel, aut illi æqualem alteram adjectam concipio, magnitudinem illam, quam concipitur ità compoſita, deſigno nomine, vel charactere binarii; quòd ſi mag-

nitudinem eandem A adhuc recogito, vel alterâ vice ſuperadjicio prius conceptæ magnitudini, binarii notâ deſignatæ, conceptus efficitur alterius compoſitæ magnitudinis, quam itidem enuncio nomine, vel deſcribo charactere ternarii. Atque ità porrò de reliquis. Sed de generali numeri ratione quæ ſupra diximus, exemplo nonnihil elucidemus. Sit e. g. linea quævis A; huic nullus ex parte rei numerus peculiariter competit; at ſi cogitemus ipſam ex aliqua linea per trinam ſui repetitionem, modo expoſito, componi (vel quod eôdem recidit, in tres æquales partes fore diviſibilem; idem enim eſt ex tribus æqualibus componi, quod in tria æqualia reſolvi poſſe) ea propter ipſam appellabimus tres (vel tres tertias ipſius A) & congruo ternarii charactere denotabimus. Sin concipiamus eandem A ex ſeptem æqualibus lineis aggregari (vel in 7 æquales lineas poſſe diſtribui) ex qualibus iiſdem particulis decem altera linea B compoſita (ſeu in totidem illas reſolubilis) cenſetur, hinc linea A vocabitur ſeptem vel ſeptem decimæ partes ($\frac{7}{10}$) lineæ B. Quòd ſi eadem linea A nullatenus aut compoſita aut diviſa cogitetur, unitatis ipſa gaudebit nomine & charactere. Sin adhuc apprehendatur dicta linea A ceu media proportionalis inter lineam quamvis B ex duabus lineis æqualibus conflatam (biſectámque æqualiter) & unam iſtarum æqualium linearum (hoc eſt inter totam B, & ſemiſſem ejus) vel inter quamvis rectam C, & duplam ejus; propter iſtum conceptum linea A deſignabitur nomine, vel charactere radicis ſecundæ (vel lateris quadrati, $\sqrt{2}$) nu-

numeri $\frac{1}{2}$, vel numeri 2, respectivè; ut sit nempe radix $\frac{1}{2}$B ($\sqrt{^2}\ \frac{1}{2}$B) vel radix 2C ($\sqrt{^2}$ 2C). Ex quo proinde, 6. Sequitur advertendum tres esse (præter unitatem ipsam, quæ numerorum veluti fons est ac origo) differentias & quasi species numerorum; hoc est, integrorum, fractorum, & rädicalium vel surdorum, quos vocant. Quorum integri quidem nomina sunt vel symbola magnitudinum, compositionem ipsarum subindicantia certis ex partibus æqualibus (quarum unaquæque simplex censetur & nominatur unitas) ut si magnitudo A confletur ex sex partibus æqualibus (vel ex una sexies repetita) appellabitur A sex. Fracti verò (quibus accenseo mixtos, qui constare possunt ex integro & fracto) notæ sunt cujuscunque magnitudinis itidem innuentia compositionem ejus ex partibus æqualibus, non quidem absolutè, sed ipsam comparando cum alia magnitudine composita ex aliquot partibus, quæ prioris partibus æquales sunt, & cognomines: Vel, numeri fracti sunt symbola cujuscunque magnitudinis certo modo compositæ æqualiter, exhibentia proportionem ejus ad alteram magnitudinem, ex iisdem æqualibus partibus compositam. Ut si A componatur ex 6 partibus æqualibus, & B ex totidem iisdem novem, erit A sex nonæ partes ipsius B ($\frac{6}{9}$B) vel A se habebit ad B, ut sex ad novem. Eadem nempe magnitudo, unitatis nomine nuncupata, sexies accepta componit A, novies verò sumpta constituit B. Numeri verò radicales, vel surdi notæ sunt magnitudinis cujuslibet, commonstrantes ipsam esse proportione qualitercunque 6.

mediam

mediam inter quamlibet assumptam magnitudinem homogeneam, æqualiter compositam secundum exigentiam appositi numeri seu integri seu fracti, & partem ejus unitatis vice fungentem (vel quod perinde est, inter acceptam quamvis magnitudinem simplicem ac indivisam, & propterea unitatis vicem obeuntem, ac aliam ità prout adjunctus exigit numerus multiplicatam) ut radix secunda, vel quadratica, numeri 3, denotat mediam proportionalem inter quamvis assumptam magnitudinem, & ipsius triplam. Et radix tertia, vel cubica, ternarii designat primam ex duabus mediis proportionalibus inter quamvis assumptam magnitudinem, & triplam ejus. Et radix quarta (vel quadrato quadratica, quam etsi minùs commode solent appellare) numeri 5, significat primam ex tribus mediis proportionalibus inter quamvis magnitudinem & quintuplam ejus, & sic pariter de cæteris. Quòd verò spectat ad surdos hosce numeros (quos irrationales, ineffabiles, irregulares, inexplicabiles, nullo suo merito, & quasi per convicium atque calumniam appellitant) illos complures propriè numeros esse negant, & ab Arithmetica secluſos ad aliam, (quæ tamen nulla est) scientiam, Algebram nempe, solent ablegare. Quo pacto suam Arithmeticam membro demutilant amplissimo, & utilissimo (sæpiùs enim, dum magnitudines metimur, & inter se comparamus, ad hosce surdos, quàm ad rationales quos vocant numeros computando devenimus.) Mihi verò minimè dubium est, quin hi numeri pari jure numeri censendi sint, & æquè spectent ad numero-

rum

rum ſcientiam, ac alii quivis integri vel fracti; quum pariter apti ſint, & juxta neceſſarii magnitudinibus exprimendis, comparandis, determinandis (in quo tota numeri ratio, vis, uſus conſiſtunt, ut toties monuimus) & cùm nulla ſit generalis numeri proprietas, aut operatio numeris conveniens integris vel fractis, quæ & non & his æquè congruat. Nam e. g. æquè capio quid ſignificet radix quadrata trium ulnarum, ac quid denotant tres ulnæ, vel $\frac{1}{3}$ ulnæ. Et illam pariter, ex vi ſignificationis ſuæ, ac has reipſâ poſſum exhibere. Nam aſſumptâ rectâ A, quæ æquetur uni ulnæ, & alterâ B tres ulnas exæquante, inventâque inter has mediâ proportionali, modo in Geometriâ commonſtrato, erit hæc inventa recta quæ deſignatur radice quadratâ trium ulnarum. Poſſunt & hi numeri, ex certiſſimarum regularum præſcripto, ſibi mutuò adjici, & ſubtrahi; duci in ſe; ſibi applicari (vel à ſe invicem dividi) & quocunque modo ſupputari, menſurari, proportiones magnitudinum exprimere, &c. Quare nulla eſt ratio cur pro numeris habendi non ſint, aut ex Arithmetica debeant eliminari. Atqui ſatis oſtendunt hi numeri (quos proinde non incongruè Geometricos appellat Stevinus) numerum à magnitudine nihil differre reipſâ; quos certè nec ipſâ mente putem abſtrahi poſſe ab omni magnitudine. Quid enim abſtractè ſignificet $\sqrt{2}$? An radicem abſtracti numeri 2? At hic numerus illo pacto nullam radicem habet (hoc eſt nullus numerus integer vel fractus in ſe ductus efficit 2) an mediam proportionalem inter 1, & 2? At

nullus

nullus omnino talis datur numerus medius. Ad magnitudinem igitur omnino recurrendum est, ut hic numerus quid designet mente concipiatur. Nam etsi inter numerum 1, & numerum 2, nullus datur medius proportionalis numerus, inter magnitudinem tamen unitatis nomine significatam, & magnitudinem binario denominatam, datur media magnitudo proportionalis radicis binarii nomine commodè designanda. Idem arguunt numeri fracti, præcipuam fermè partem constituentes Arithmeticæ, utpote qui compositionem ac divisionem (proprias affectiones magnitudinis, nec aliis rebus, nisi secundario adjunctæque magnitudinis gratiâ, competentes) intimè connotant, implicantque. Qui verbi gr. dicit aut concipit $\frac{2}{3}$, nihil omnino dicit aut concipit aliud præterquam magnitudinem aliquam ex duabus componi, qualibus ex tribus altera magnitudo componitur; vel aliquam magnitudinem in tres æquales particulas dirimi, de quibus duas assumptas concipit aut enunciat. Nec aliter integri numeri magnitudines exprimunt & repræsentant; compositionem quippe vel divisionem etiam hi conceptu suo involvunt & consignificant. Ex quo obiter perspicere licet quid judicandum sit de aliquoties memorati egregii viri sententia; qui sc. ut Arithmeticam Geometriâ multo latiùs extendi faciat manifestum, universam Algebram Geometriæ abjudicatam addicit Arithmeticæ; æquationes Algebricas altiùs ascendere statuit, quàm Geometricas; negátque Geometriam tot suppeditare dimensiones, quot Arithmetica gradus ostentat, & in illam

sen-

ſententiam pluſcula. Quæ tamen facillimè diſcuti poſſunt omnia, dicendo, per iſtas æquationes (vel dimenſiones) Algebraicas, gradúſve Arithmeticos vel omnino nihil intelligi, nil revera ſignificari; at omnes imaginarias eſſe Chimæras,& mera τερατίσματα; vel aliquid ipſis in Geometria reſpondere, quod ſignificent & repræſentent. Sicut revera de facto nullus eſt quiſquam numerus, nulla poteſtas Algebrica, nullus gradus Arithmeticus, cui non reſpondeant infinitæ, quovis in genere, magnitudines, quas illi numeri repræſentant & exprimant appoſitè. Inſtantiæ cauſâ proponatur quadrato quadratum (vel quarta poteſtas) numeri ternarii; vis hanc poteſtatem exhiberi Geometricè? Sumatur utcunque magnitudo quævis (perinde fuerit an lineam, ſuperficiem, aut ſolidum accipias, at) ſimplicius erit ſi capiatur recta linea, puta A. Hujus autem tripla ſit B; & continuetur ratio ipſius A ad B ſic ut 5 rectæ A, B, C, D, E, ſint continuò proportionales; eritque E recta per ternarii quadrato quadratum (vel quartam poteſtatem) denotabilis. Nam ſi a dicatur 1, erit B, 3; & C, 9; & D, 27; & E, 81; hoc eſt quadrato quadratum numeri 3. Habetur igitur quadrato quadratum Geometricum numeri 3, vel lineam B, quam iſte numerus deſignat. Pari ratione quilibet Arithmeticus gradus, vel Algebrica poteſtas Geometricè poteſt exhiberi. Nihil igitur validi continent ejuſmodi ratiocinia. Poſſem huc in hanc mentem plura: Sed piget, extra ordinem, in re tam liquida diutiùs immorati. Quòd vero Philoſophus Arithmeticam pronunciet accuratiorem

Τὰ εἴδη χαίρετον Τερατίσματα γάρ ἐστιν. *Ar. I. Poſt. c. 28.*

rem

rem Geometriâ: Αἱ γὰρ (inquit) ἐξ ἀλαττόνων ἀκριβέστεραι τῶν ἐκ προθέσεως λεγομένων, οἷς ἀριθμητικὴ γεωμετρίας. Et alibi explicatiùs: Ἡ ἐξ ἐλαττόνων (ἐπιστήμη ἀκριβεστέρα) τῶν ἐκ προθέσεως, οἷς γεωμετρίας ἀριθμητικὴ· Λέγω δὲ ἐκ προθέσεως, οἷς μονὰς οὐσία ἀθετος, στιγμὴ δὲ οὐσία θετός. Et eum exponens Proclus: Ἀριθμητικὴ μὲν ἀκριβεστέρα γεωμετρίας· Αἱ γὰρ ἐκείνης ἀρχαὶ τῇ ἁπλότητι διαφέρουσι· Ἡ μὲν γὰρ μονὰς ἀθετός ἐστιν, ἡ δὲ στιγμὴ θέσιν ἔχουσα, καὶ ἀρχαὶ μὲν γεωμετρίας (legendum ἀρχὴ) ἡ στιγμὴ προλαβοῦσα τὴν θέσιν, ἀριθμητικῆς δὲ ἡ μονάς. Ista nec veritati consentanea sunt; & infirmissimo tibicine nituntur omnia. Quæ enim scientia Geometriâ esse poterit accuratior? Quænam sibi præstruat evidentiora vel certiora (addo vel simpliciora) principia Geometricis pronunciatis? Vel in eliciendis conclusionibus suis Logicam exerceat strictiorem, & rigidiùs accuratam? At simplicior est, inquiunt Aristoteles & Proclus, unitas Arithmeticæ (rectiùs numeri dixissent) principium, quàm punctum, quod est principium Geometriæ (vel magnitudinis potiùs). Quòd punctum implicet positionem, unitas non item: Τὸ μηδαμὴ (inquit Aristoteles) διαιρετὸν καὶ ποσὸν στιγμὴ καὶ μονάς· Ἡ μὲν ἀθετος, μονάς· Ἡ δὲ θετὸς, στιγμή. Verùm imprimis deterrima est, & pessimas in Mathesin derivat consequentias ista puncti Geometrici cum Arithmetica unitate collatio: Nam unitas reverà parti cujuslibet magnitudinis aliquotæ respondet, non puncto: Ut si linea dividatur in sex partes æquales, sicut ista tota linea respondet numero sex, ita quæ-

I. Met. c. 2.

I. Anal. Post. c. 27.

Initio secundi Commentarii.

IV. Met. cap. 6.

quælibet particula ſexta reſpondet unitati, minimè autem puncto, quod nulla pars eſt iſtius rectæ. Et punctum rectè dicitur indiviſibile; unitas verò nequaquam; (nam v. g. quomodo $\frac{3}{6}+\frac{3}{6}$ æquatur unitati, ſi unitas indiviſibilis eſt, & incompoſita, & inſtar puncti ſe habens.) quin potiùs ſola unitas propriè diviſibilis eſt, & ex unitatis diviſione procreantur numeri. Multo veriùs & tutiùs (ut poſtea monſtrabimus, cùm de puncto Geometrico ſe præbebit occaſio diſſerendi) punctum Geometricum cyphræ, vel nihilo Arithmetico comparetur; quæ cipra revera terminus eſt numeri, finiens unumquemque numerum, & numeris intercedens ſe proximè conſequentibus, non verò pars ejus; quæ numero appoſita non auget ipſum, nec ablata minuit; à quâ deſumitur initium computandi, cùm ipſa non computetur, quæque præcipuas Geometrici puncti proprietates planiſſimè refert. Quòd verò de poſitione dicitur, nec id uſquequaque ſanum eſt & ſolidum; nam punctum univerſaliter acceptum haud minùs indeterminatum eſt, & expers poſitionis, quam unitas itidem ſumpta univerſaliter: Singulariter autem accepta unitas definitam æquè poſitionem, & reliquas ſingulares includit circumſtantias, ac ipſum ſingulare punctum. Denique non diverſa, nedum impar eſt harum ſcientiarum (Arithmeticæ & Geometricæ) ἀκρίβειαν; ſed prorſus eadem; ex iiſdem hauſtæ principiis; circa res eaſdem occupata. Huc denique ſpectantia, & hinc conſequentia plurima poſſem attexere; ſed

Nè

Nè rem longiùs extraham & tædio sim p nemini non satis liquebit, opinor, hæc quæ suggessimus & talia serio perpendenti, numerum (qualis saltem à Mathematicis pertractatur) ab ipsa continua magnitudine haudquaquam reipsa differre; nec aliunde quas habere videtur proprietates (compositionem, divisionem, proportionem, atque consimiles) quàm ab illa, vel propter illam, quatenus illius vicem gerit & personam, quasi sustinet, adipisci; nec proinde numerum esse speciem quantitatis magnitudini contradistinctam, nec objectum alicujus scientiæ à Geometria (quæ circa magnitudinem versatur universam) diversæ, sed ipsius quæcunque sit contemplationem ad Geometriam pertinere, eáque includi. Proinde nec inconsultè feciſſe συγχωρῶ nostrum (quicquid obstrepat Ramus illum fugillans hoc nomine) qui Geometricis elementis Arithmeticas inseruerit speculationes; imò potiùs rei Mathematicæ plurimùm interesse, nè scientiæ istæ seu naturâ disparatæ segregentur aut divellantur à se invicem; adeóque de ipsis promeriturum egregiè, qui commodam in Geometria sedem assignaverit Arithmeticæ. * Sed hîc pedem fixo.

* *Qualem certè videtur antiquitùs obtinuisse; siquidem vel ipse magnus Orator de Geometria obiter tractans, de recepto opinor usu potius quàm ex ingenio suo dicat*, Geometriam in numeros atque formas esse divisam. *Quintil. I.* 10.

LECT.

LECT. IV.

DE Mathematicarum scientiarum partitione quæ mihi vita sunt ex usu proposui. Quam verò plerique tradunt ipsarum divisionem in theoreticas & practicas consultò prætermisi, ceu parùm probam & minùs necessariam; utpote quæ non diversas scientias, sed ejusdem duntaxat scientiæ diversos innuit respectus. Enimverò, meo judicio, omnis scientia cum speculativa est, tum practica: Speculativa, quatenus veritates (hoc est veras propositiones) objecto suo convenientes speculatur, hoc est quærit, invenit, demonstrat; practica verò, quatenus illæ veritates inventæ, demonstratæque ad usum referri, in praxin redigi possunt. Speculatur ex. gr. philosophus politicus, & rationibus excussis concludit, quæ sit optima forma Reip. quæ leges publicæ saluti conducant: Ethicus, quale sit in talibus rerum circumstantiis constituti viri boni officium considerat & pronunciat (hoc est, investigat & condit theorema quoddam, regulam præscribit universalem): Physicus simplicium, quæ vocant, naturas, virtutes, & temperamenta (num refrigerandi vel calefaciendi, desiccandi vel humectandi polleant facultate, salubria sint an noxia) disquirit, & ex ratione vel experientiâ determinat: Eatenus istæ scientiæ theoreticæ sunt. At siquis conclusionibus istis utatur ad praxin suam dirigendam;

iſſque ſuas actiones attemperat: Si remp. adminiſtret ex iſtius politici theorematis præſcripto; ſi juxta præceptum illud morale vitam inſtituat; ſi plantam iſtam ſalutis cauſa ſumat, aut reſpuat, eo fit ut iſtæ ſcientiæ, iſtæ concluſiones evadant practicæ. Idem contingit in caſu noſtro. Geometra demonſtrat univerſim quodvis triangulum parallelogrammi cujuſvis ſuper æqualem baſim conſtituti & æquæ ſibi alti dimidium æquare; vel conum æquari tertiæ parti cylindri ſuper æqualem baſem conſiſtentis, & æquè alti; hæ ſunt univerſaliter veræ propoſitiones & regulæ, quas Geometra reperit & comprobat ſpeculando; quibus uti poteſt quiſquis areæ cujuſvis triangularis menſuram determinare, vel Vas quodvis conicum cum menſura cylindrica conferre ſibi propoſitum habet; unde practica dici poſſint iſta theoremata, quatenus uſum & praxim reſpiciunt; ſed inepte propterea utrumque illud theorema duplex ſtatuatur, ſeu dividatur in theorema ſpeculativum & practicum. Eſt igitur unica Geometria diverſos ſubiens reſpectus, & quæ contemplativa dici poteſt quatenus vera, activa quatenus utilis. Res clara eſt, quid attinet plura; quòd ſi cui regulas quaſdam utiliores, quæ præcipuarum magnitudinum dimenſiones oſtendant, Geometriâ excerptas conquerere libet, vel eaſdem præcipuè materiali cuivis ſubjecto accommodare (licèt id forſan obſtet principali ſcientiæ, & præſtet illas non alibi quàm in ipſa Geometria, hoc eſt, in ſuo loco, & ordine nativo, ſuis fundamentis affixas demonſtrationibus ſuis adhærentes reperiri) haud admodum repugnem: Sed non ideo

ideò censeri debet ejusmodi regularum congeriem constituere partem quandam aut speciem Geometriæ à contemplativa differentis. Non sunt igitur, Trigonometria (doctrina de dimensione triangulorum rectilineorum & sphæricorum) Altimetria, vel Euthymetria (quæ distantias, investigandi modum indicat) Planimetria (quæ superficies planas describere & emetiri docet) Stereometria (quæ solidorum corporum mensuras comparat) Geometriæ practicæ magis quàm speculativæ partes; at unius Geometriæ, quæ respectu vario speculativa dici potest, & practica. Sed de hac re sufficiant ista.

De Mathematicarum Scientiarum objecto generali, deque partitione ipsarum hactenus est dissertatum. Proximè succedit, ut de modo dispiciamus, quo circa suum objectum versantur; qui certè non alius est ab eo, qui debet quoad ejus fieri potest, in aliis, propriè dictis, scientiis obtinere. Siquidem id sibi propositum habent omnes scientiæ, ut objecti sui præcipuas proprietates, affectiones, & passiones, cum ejus essentia conjunctas, aut ab ipsa manantes, immediatè sc. aut mediatè, investigent; hásque illi necessariò competere per evidentem & certum discursum ostendant. Etsi de facto præstetur hoc, ob materiæ conditionem, à quibusdam, ut non uno loco advertit Aristoteles, ἀκριβέστερον καὶ ἀναγκαιότερον strictius & fortius, ab aliis μαλακώτερον dilutiùs & dissolutiùs. Ejusmodi verò discursus ἀπόδειξις (demonstratio) dici solet (ideò forsan, quod per illum deducta conclusio tam intellectui constat liquidò, quàm sensui manifestè patefit res exerto digito

V. Metaph. cap. 2. XI. Metap. cap. 7.

gito demonstrata; nam δεικνύειν est indigitare, velut extento digito ostendere; δακτυλοδεικτεῖν; unde δάκτυλος, quasi δείκτυλος) de hoc verò discurrendi modo non est mei vel officii vel propositi, sed ad Logicam propriè spectat, generatim pertractare: Illum qui nôsse cupit intimiùs, & a primis fontibus degustare, ipsum consulat oportet egregium ejus inventorem simul, & luculentum auctorem Aristotelem; in libris Analyticis, Posterioribus præsertim, demonstrationis enucleantem naturam, & leges ei præfigentem; mihi suffecerit, ut res feret, ab illo dicta præscriptáque, quatenus Mathematicis congruunt ratiociniis insinuare. Adeò verò, si rem crassiùs æstimemus, convenit hisce scientiis demonstratio, ut ipsarum quasi propria & peculiaris habeatur, nec ex æquo jure convenire censeatur aliis disciplinis. Unde (moralium initio) Aristoteles quòd res Ethicas pinguiori Minervâ exponeret, nec à se dicta strictè demonstraret, indè petit excusationem, quòd Mathematicis scientiis iste demonstrandi rigor, non ejusmodi doctrinis congrueret, subjiciens; δραπλήσιον γὰρ φαίνεται μαθηματικοῦ τε πιθανολογοῦντος ἀποδέχεσθαι καὶ ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν. Parique ratione negat exigendam à naturali philosopho Mathematicam ἀκριβολογίαν. Τὴν δ' ἀκριβολογίαν μαθηματικὴν (inquit) οὐκ ἐν ἅπασιν ἀπαιτητέον, ἀλλ' ἐν τοῖς μὴ ἔχουσιν ὕλην. Quod cùm animadverteret auctor Logicæ minimè spernendus Jac. Zabarella, prout alicubi de se testatur ipse, demonstrationis naturam ut assequeretur rectiùs, & feliciùs explicaret, Eucli-

I. Metaph. cap. ult.

Euclidea Geometriæ elementa semel atque iterum sedulò pervolutavit. Operæ verò forsan pretium sit, unde proveniat hoc discrimen, (quamobrem sc. quæ in Mathematicis ubique reperitur, & sola locum obtinet, in reliquis disciplinis nusquam aut raro compareat, demonstratio) causas paucis exquirere. Etenim ex ista collatione cujusmodi sit demonstratio Mathematica, nescio an facilius & clarius, quàm alia quâvis via constabit & elucescet. Itaque provenit hoc exinde,

1. Quòd, quas hæ scientiæ contemplantur, res animo clarè concipimus, & ipsarum distinctas ideas facilè consequimur, eò quòd simplicissimæ sint, & communissimæ, maximè familiares nobis, sensibus expositæ, obvijs exemplis conspicuò repræsentabiles, adeòque intellectu facillimæ. Nihil abstrusi, impliciti, insolentis ipsarum complectitur natura. Quid enim v. g. sit linea recta, quid plana superficies, triangulum, quadratum, circulus, pyramis, cubus, sphæra, eò clarè distinctèque percipimus, ad modum pauca requiruntur, & quæ paucissimis exprimi verbis, & lucidissimis exemplis repræsentari possunt. Unde fit ut de rebus tam evidenter & accuratè perceptis non adeò difficile sit quædam demonstrare, quæ scilicet istis ideis cohærent, vel ab iis statim consequuntur. In alijs verò scientijs plerumque secus accidit; ut nempe res, quas illæ speculantur, magis reconditam, à sensibus abjunctam, involutam, & compositam naturam habeant, & ut illas obscurius atque confusius apprehendamus. Quid ex. c. sit in Physicis color, in moralibus felicitas, in politicis jus gentium, difficile

1.

sit imaginari distinctè, exquisitè definire: Istarum rerum nulla fermè perspicua notio nostris animis obversatur; & siqua sit à plurimis utcunque conflatur & pendet, talisque existit, cui nemo forsan alius per omnia similem habeat, aut quam iis, quibuscum congredimur, approbare valeamus. Unde talium quot auctores & interpretes, tot fere reperiuntur diversi conceptus, & explicationes admodum inter se discrepantes: Et consequenter evadit arduum ejusmodi de rebus perplexis & indeterminatis certi quicquam statuere vel demonstrare. Adhuc, 2. Evenit hoc ex eo, quòd Mathematici vocabula, quibus utuntur, perspicuis & omnem ambiguitatem excludentibus definitionibus explicant; vel, ut meliùs dicam, conceptus illi suos nominibus efferunt propriis, adæquatis, significationis certæ & invariabilis; ità quidem ut exaudito rei propositæ nomine respondens ei conceptus se continenter objiciat animo, neque de qua re quidvis affirmetur aut negetur, ulla suboriatur dubitatio, vel controversia; quod ad propositionum certitudinem nemo non videt quantopere conducat. In aliis verò disciplinis, ut notionum obscuritas, intricatio, confusio; sic & ambiguitas atque inconstantia vocabulorum in significando magnam parit ac infert necessariò conclusionum caliginem & incertitudinem. Nam quæ usurpant nominum definitiones ut plurimùm negligunt, & locutiones sæpiùs adhibent improprias & metaphoricas; tum alio & alio sensu eadem vocabula accipiunt; diversi saltem authores ipsa variè sumunt, & diversimodè describunt, suæque quisque significationi,

ficationi, vel descriptioni suas conclusiones accommodat: Unde propositionum non tantùm incertitudo, sed & repugnantia subnascatur necesse est; inde veritatis contemplatio degenerat in disputationem, disputatio desinit in meram λογομαχίαν; cùm in verborum indefinita significatione potissima pars versetur controversiæ. Neque quas subinde proferunt definitiones, vel descriptiones vocabulorum, his vitiis plerumque remedium afferunt, at majores haud rarò tenebras & tricas inducunt quæstioni. Quid enim ab ejusmodi definitionibus affulgeat lucis? Motus est actus entis in potentia, quatenus in potentia: Lumen est actus perspicui, qua perspicui. Anima est ἐντελέχεια (vel ἐνδελέχεια, perinde est ad intellectum) vel Anima est, ἀριθμὸς ἑαυτὸν κινῶν. Quibus scilicet explicationibus implicantur potiùs & confundimur, quàm illustramur aut instruimur. Ut plerisque definitionibus melior sit & ad usum commodior illa per jocum à Democrito prolata definitio hominis; Homo est quod omnes scimus. Atqui demum cum propositionum demonstrandarum materia sint vocabula, rerum ab animo conceptarum symbola, nisi certò significent illa, de propositionum veritate constare non poterit. 3. Quòd Mathematicis adeo peculiaris sit demonstratio procedit indè, quod illi nulla adsumunt aut adhibent principia, vel axiomata non universaliter vera, non inductione perpetuâ comprobata, non communi suffragio concessa, non denique satis firma, sua luce conspicua, penitus ἀναπόδεικτα & ἀναπόδεικτα: ita quidem ut quæ ex his inferuntur conclusiones audien-

3.

tis rationem necessariò constringant. Quis enim, eidem tertio æqualia sibimet ipsis exæquari; si ab aliqua magnitudine detrahantur, aut eidem apponantur æqualia, residua vel composita subinde æqualia; partem à toto superari; hisque gemina semel ac audiverit non intelliget facilè, non prompte agnoscet, ceu veritissima, notissima, jugi experientia cognitissima, nullam exceptionem patientia, nullam aut probationem aut declarationem ampliorem postulantia. In reliquis verò disciplinis, quæ ad alias astruendas sumuntur & inserviunt pronunciata, vel plerunque quoad universalitatem suam infringi possunt instantiis contrariis; & propterea, ne falsitatis arguantur, exceptiones nonnullas, limitationes, seu distinctiones requirunt, vel non admittuntur nisi precariò, nec audientis consensum extorquent, vel ulterioris indigent confirmationis, aut explicationem prolixiorem desiderant quo fit ut ex illis elici nulla possit universaliter vera, manifesta, indubitata & invicta conclusio; nec fundamentis adeò lubricis & vacillantibus ulla superextruatur stabilis & inconcussa demonstratio, cui nemo contrà hiscere audeat, aut refragari. Nempe talibus ex pronunciatis; natura nihil facit frustra; omnia appetunt bonum; nihil dat quod non habet; quid obsecro firmi vel certi deducatur? Quot ex illis, modicam impendendo subtilitatem, sibi contradictorias propositiones inferre licet, inferre solent argutiarum opifices? Quibus nimirum extricandis & inter se conciliandis distinctiunculas comminisci necesse habent innumeras (mirificas illas plerunque)

que) è quibus resultat concertatio multa, nulla conflatur demonstratio. Huic affinis est alia ratio, 4. Quòd Mathematici petitiones adhibent, aut supponunt hypotheses non nisi clarè possibiles, & facillimè imaginabiles (εὐπετεῖς, εὐπορίστους, εὐμηχάνους προχείρους); quásque adeò nemo, utcunque præfractus, asper, illiberalis ingenio, non ultrò largiatur & indulgeat postulantibus. Ut e.g. cùm supponunt, aut postulant, ut inter duo quævis designata puncta ducatur, aut ducta concipiatur recta linea; quovísque puncto in centrum assumpto, ut per aliud itidem acceptum punctum, circuli circumferentia transeat, aut intelligatur transire. Corpus aliquod plano transadigi; semicirculum circa suum axem rotari; & istis consimilia; quis inficias eat hæc fieri posse, quis dubitet facta concedere; quis obstrepat tam evidenter possibilia supponenti? Quum talia fieri posse sentiat & facta videat quotidie. In aliis verò scientiis aliter se res habet. Nec enim ut rerum causas utcunque videantur explicare, suppositiones verentur procudere, suis ratiociniis præstruere, sibi condonandas expetere prorsus arbitrarias, admodum duras, horridè immodestas; nedum credita difficiles, at subinde vel conceptu arduas. e.g. Cùm in physicis ad explicandum modum visionis, aliqui sibi postulant concedi, quòd à quovis objecti visibilis signo species nescio quæ intentionales undicunque dispergantur, aut propagentur. Alii verò quòd effluvia quædam corporea, seu cuticulæ quædam omni cogitatione tenuiores à rebus objectis derasæ discerptæque, versus aspectum ubicunque

4.

Procl.

situm

fitum rectà deportentur. Nonnulli demum, quòd à quolibet objecti lucidi, vel illustrati puncto ad unumquodque punctum medii circumfusi motus quidam (seu actiones vel nisus) facili sc. negotio, dictum factum, dirigantur & deriventur. Cujusmodi hypothesium cuilibet, etsi ingeniosè confictæ, nemo ferè tam simplex est aut credulus ut statim consentiat, aut à seipso protinus impetret concedere, non modò quòd vera sit, at verò quòd omnino possibilis, aut saltem aliquatenus probabilis; cùm multæ pauliſper attendenti se difficultates objiciant, fidem distinentes, aut obruentes. Et illorum, qui talia sibi plurima, perfrictâ fronte, obstinatamente, condonari volunt quis non importunitatem repellat, in verecundiam averſetur? Saltem ejusmodi fluxis arenis quis solidam inniti putet demonstrationis fabricam? Ac-
5. cedit his, 5. Quòd Mathematici non tantùm pronunciata manifestè vera præmittunt, & hypotheses adsumunt liquidò possibiles; at in utroque genere strictissimam paucitatem affectant, vel potiùs efflictim deperent. Axiomata præmittunt inquam, pauciſſima; parciſſimè quidvis petunt, adsumunt, aut præsupponunt. Est enim tenerrimæ frontis, & stomachi robustissimi, pudentissimum genus hominum, & tædii patientissimum. Quemvis concoquere malunt laborem in dictis suis demonstrandis, quàm assensum gratuitum emendicare, vel nimium audi-

Arist. l. Post. cap. 25. Ἐὰν γὰρ ἄυτη ἡ ἀπόδειξις βελτίων (τῶν ἄλλων τῶν ἀυτῶν ὑπαρχόντων) ἢ ἐξ ἐλαττόνων ἀιτημάτων, ἢ ὑποθέσεων, ἢ προτάσεων. Εἰ γὰρ γνωρίμοι ὁμοίως, τὸ θᾶττον γνῶναι διὰ τούτων ὑπάρξει. Τοῦτο δ' αἱρετώτερον.

auditorum liberalitatem experiri. Proprii ratiocinii virtuti, non alienæ facilitati deberi volunt conclusionum suarum evidentiam & firmitatem. Solertiâ suâ dignum arbitrantur è tenui forte mirificè tandem locupletes evadere; ab exili radice in immensam scientiæ proceritatem excrescere; super angusto fundamine vastam, nec minùs firmam erigere molem conclusionum. Per longas igitur ambages morosiùs & prolixiùs aliquas propositiones, alioquin facillimas, deducere satagunt, eo quòd à multiplicando postulatorum & axiomatum numero vehementer abhorreant.

Quo nomine magnus ille censor (dicam an carptor?) Ramus Euclidem acriter reprehendit, quòd plurimas is propositiones susceperit demonstrandas, quas, ut ille quidem opinatur, satiùs fuisset ceu suâ luce claras arripere, indemonstratas anticipare, in axiomatum censum referre. Et potuisset eodem jure totam catervam veterum Geometrarum similis culpæ reos peragere, ipsumque in illis divinum Archimedem increpare, quòd axiomata vel postulata plura quàm necesse fuit adsumendi licentiam refugiens, admiranda sua theoremata, quæ breviùs potuisset & clariùs, istâ nimirum adrogatâ sibi potestate, maluisset utcunque nonnihil intricatiùs proponere, prolixiúsque demonstrare. Mihi verò contra neutiquam videtur improbandum, at magnopere potiùs laudandum & amplectendum eorum institutum. Siquidem nulla debet nimia censeri diligentia, vel solicitudo, quæ primis scientiarum fundamentis impenditur stabiliendis. *Schol. Mathemat. lib.* 3.

Longe

Longè præstat ut multæ demonstrationes redundare, quàm ut una videatur deficere. Detrahenda est Epicureis ingeniis omnis ansa cavillandi, vel argumentationis cujusvis principio, seu incerto vel minùs notorio, consensum detrectandi. Est amolienda, quoad fieri potest, ex hisce disciplinis omnis suspicio, omnis formido, omnis hæsitatio. Neque discentium immodicè pertentanda fides est; nec ipsorum animi longiùs distinendi sunt & obtundendi hypothesium multitudine; neque nimis assuefaciendi temerariæ præsumptioni. Saltem haud inutile sit, nec injucundum ipsarum inter se primarum propositionum, operâ syllogisticâ cohærentiam & cognationem ostendere; denique sicut magnificentius est & gloriosiùs exiguis copiis hostem debellare, ità paucis ex principiis innumeras veritates astruere, plus admirationis conciliat, impensioris aliquid laudis victrici promeretur rationi. Quare nec omnino vituperandum existimo (nedum ambitionis aut furoris arcessendum, cum non nemine) istam magni Apollonii curiosam, sed ingeniosam, sedulitatem, qui celeberrimum illud axioma, quæ eidem æqualia, conatus est demonstrare. Ut nec Regiomontani carperem supervacuum studium primas Arithmeticæ vulgaris regulas ex Euclideis, ut perhibent, elementis aggressi deducere. Quos æmulatus quidam è nostris, ignotus nemini philosophus, etiam clarissimi pronunciati, Totum parte suâ majus est, demonstrationem attentavit.

Illud utcunque constat ex dictis, quod ostendere propositum mihi fuit, tantus ubi labor

labor ſuſcipitur, tam anxia cautela adhibetur, nè facilè propoſitio quævis in axiomatis dignitatem aſſurgat, & nè conferta turba ſuccreſcat hypotheſium, ibi nihil miri contingere, ſi cunctæ concluſiones quàm validiſſimè demonſtrentur. In aliis autem doctrinis diſpar procedendi modus eſt & ratio. Nam axiomatum iſthic infinita ſeges pullulat, quæ vel ſpiſſa voluminum horrea replendo ſit. Quævis enunciatio veriſimilis ad principii gradum aſpirat; & alicui comprobandæ concluſioni qualemcunque præſtat operam, quamvis gratis aſſumpta. Cuilibet autem expediendæ quæſtioni, vel phænomeno explicando nova diſtinctáque procuditur hypotheſis. Quo fit ut in eadem (quæ dicitur & habetur) ſcientia reperiantur hypotheſes innumeræ; quot, inquam, materiæ tractandæ, tot hypotheſes diverſæ, auſcultantium nedum fidem ſuperantes, at vel ipſam memoriam obruentes; quæ vix ullâ ratione fieri poteſt ut omnes conſiſtant, & conſentiant inter ſe, neque quòd non plures ſibi mutuò diſcrepent & adverſentur. Unde quale provenerit demonſtrationum ſyſtema nemo non videt, non experitur. At porro, 6. Generationes magnitudinum, quas Mathematici pertendunt, quibus ipſas definiunt aliquando, & è quibus ipſarum proprietates educunt, etiam imaginatio noſtra ceu maximè poſſibiles aſſequitur & percipit facillimè, ratione protinus adſtipulante. Ex. gr. cùm ex rectæ lineæ, uno extremo fine permanente, circumductu circulum effici dicunt; ex trianguli rectanguli circa crus unum immotum rotatu conum efformari; ex ſemicirculi circa diametrum, 6.

velut

velut axem, gyratione ſphæram detornari; cùm itidem rectam lineam ex puncti greſſu breviſſimo & indeflexo; parallelogrammam ſuperficiem ex rectæ lineæ per idem planum tranſverſo, perpetuúmque retinente parallelliſſimum, itinere; priſma vel cylindrum ex conſimili rectilineæ planæ figuræ, vel circuli parallelo tranſitu deducunt, aut definiunt; cùm ſpiralem & quadratricem lineas curvas ex duplici motu uniformi (uno recto, vel parallelo, altero circulari) conficiunt; parabolam ex duplice motu uno uniformi, altero uniformiter accelerato deſcribunt, & ex ejuſmodi cauſis magnitudines ortas concipiunt; quin tales motus peragi poſſint, & tales ab illis effectus neceſſariò reſultent, qui tantiſper attendet abnuere nemo poteſt, aut ullatenus ambigere; adeò clarè percipit intellectus noſter, quid ex iſtis generationibus ſuppoſitis conſequatur. Unde nullo negotio talibus ex cauſis, magnitudinum proprietates elici poſſunt & demonſtrari. Non ità naturalium, aut aliarum rerum productiones in propatulo ſunt, aut ex cauſis quibuſvis ſuppoſitis effectorum proprietates deduci poſſunt. Poſitâ v. g. tali elementarium qualitatum complexione, ſeu temperie; vel tantâ ſulphuris adultione; vel quòd materiæ cujuſdam ſubtilis rotatus inceſſui directo prævaleat; quis audacter aſſeveret, aut ſtatim agnoſcat talem adſpectui apparentiam iri neceſſariò productum, qualis rubicundum colorem conſtituere ſolet aut comitari? Nec proinde quiſpiam ex iſtiuſmodi confictis generationibus rerum paſſiones & affectiones demonſtret. Hiſce cauſis accenſeri poteſt,

7. Ordo,

7. Ordo, quo Mathematici ſuas materias pertractant, ſuas veritates indagant, ſuas propoſitiones diſponunt accuratus. Notat Ariſtoteles ordinem in Mathematicis uſurpatum memoriæ conducere: Ἔστι (inquit) συμμνημόνευτα, ὅσα τάξιν τινὰ ἔχει, ὥσπερ τὰ μαθήματα· at ratiocinium promovet ampliùs iſte ordo: Circa quem præſertim obſervari poteſt, quòd primas propoſitiones ſuâ luce conſpicuas, aliiſque demonſtrandis præſtratas (definitiones nempe, pronunciata, poſtulata) ſedulò congeſtas prima ſede collocare ſolent, ſic exigente noſtri diſcurſûs naturâ; proximo loco ſimpliciores ſtatuunt propoſitiones ab iſtis immediatè deductas; tum illas quæ ab his proximè conſequuntur, ac ità nuſquam interruptâ perpetuâ ſerie, ſic ut à præcedentibus poſteriora lucem pariter ac firmamentum accipiant, & catena quædam nectatur argumentationum, nullâ vi diſſolubilis. Quo fit etiam, ut ſingulæ cujuſvis propoſitionis à primis uſque principiis propaginem derivare; ejus ab illis dependentiam, & connexionem perſpicere liceat, ejúſque proinde veritatem infallibili quadam ratione dijudicare. Item advertere licet quòd apud Mathematicos è propoſitionibus inventis ac demonſtratis, ſi quæ ſunt inſignioris notæ, vel communioris naturæ, ſuâ vel elegantiâ vel utilitate nobiles, illæ peritorum examine comprobatæ ratæque habitæ velut in cenſuales quaſdam tabulas digeruntur, in theſaurum reponuntur, in penu quodam publico aſſervantur, unde ſicuti poſtulabit uſus, depromi poſſunt, aliiſque cum inveſtigandis tum demonſtrandis pro-

7.

Tract. de memoria & reminiſ. cap. 2.

propositionibus inservire. Tales pleræque sunt veterum Geometrarum propositiones, quæ magnitudinum quarundum menti nostræ præsertim obviarum præcipuas exhibent proprietates, (puta, Euclidis elementa, Sphærica Theodosii, Apollonii Conica, Archimedis de sphæra & cylindro, reliquaque) quæ nempe veritatum Geometricarum circa varias materias quasi totidem seminaria sunt, totidem promptuaria, de quibus innumeræ conclusiones, quæ ad istas materias pertineant respectivè, per facilem discursum eruantur; totidem velut elementa reliquarum fermè omnium propositionum inventiones ac probationes ingredientia; totidem denique κριτήρια, vel quasi Lydii lapides, ad quos reliquarum veritas examinetur & exigatur. In aliis disciplinis secus accidit plerunque. Nam principia si quæras, nusquam deprehendes, aut saltem reperies cum conclusionibus indiscretè permista, confusaque; planè tanquam Æneæ toto disjectas æquore classes: Id quod animum studiosi valde turbat, & impedit scientiam: Nam bene * Proclus, εἴ τις εἰς ταὐτὸν συμφύρει τάς τε ἀρχὰς, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, ἔστι ἐπιταράττει τὴν σύμπασαν γνῶσιν, καὶ συγκοκᾷ τὰ μηδὲν προσήκοντα ἀλλήλοις. Nec ipsarum propositionum ullum ordinem, ullam fere connexionem observabis; adeò ut singulæ cujusque propositionis originem ad prima principia persequi nequeas, nec adeò tibi certò constare possit, utrum vera sit necne; at juxta dictum Hieroclis, ἡ μετάθεσις παραλογίζεται τὴν κρίσιν, rerum transpositio judicium decipit at pervertit. Tum nulla pro-

* *Lib.* 2. *pag.* 22.

proſtant elementa paſſim ob omnibus agnita, communique ſuffragio ſtabilita, ad quæ diſcurſus omnis referatur, e quibus petatur inventio theorematum, & quæſtionum reſolutio; per quæ denique propoſitionum veritas exploratur. Ultimò, de Mathematicis obſervari poteſt, quòd res tantummodo ſibi compertas attingunt, ignotas & incertas prætereunt. Non profitentur omnia ſcire, nec affectant de omnibus dicere; quæ vera ſciunt & invictis argumentis aſtruere queunt, ea proferunt & theorematis includunt, de reliquis tacent, & abſtinent ſententiam; malentes inſcitiam ſuam agnoſcere, quàm temerè quidvis affirmare; nihil immiſcent, aut inſerunt argumentationibus, vel aſſertionibus ſuis non planiſſimè perſpectum, & extremo cum rigore exploratum; conjecturas omnes probabiles, & bellas argutias rejiciunt; authoritati nil deferunt; affectibus nequaquam indulgent, verborum illecebras deteſtantur; ſententias ſuas efferunt, ut in Areopago, ἄνευ παθους καὶ προσωπου. Illo pacto ſuas ſcientias ab omni labe vel erroris, vel dubitationis conſervant immunes & incorruptas. In reliquis, quas abpellant, ſcientiis certis dubia, compertis præſumpta, manifeſtis obſcura, vera falſis promiſcuè confunduntur. Omnia proponunt ſibi diſcutienda, explicanda, decidenda, juxta quæ ſciunt, quæque ignorant; cum certas rationes afferre nequeunt, qualeſcunque conjecturas proferunt, pulchris coloribus infuſcatas; divinant ſæpiùs quam demonſtrant; denique quaſi de noſtris cauſas agunt quam poſſunt diſertiſſimè; & quæ probare nequeunt, ſtudent perſuadere.

8. *Rationes, quæ à Geometris adferuntur, non perſuadent, ſed cogunt. Sen. l. Qu. Natur.*

Sed vereor, nè collationis hujus prolixiùs & craſſiùs inſtitutæ pigere vos incipiat. Ex quâ tamen utcunque liquere poteſt qualis ſit apud Mathematicos ratio demonſtrandi; nempe talis, quòd cùm res ſibi ſuſcipiant contemplandas, quarum in animo claras & diſtinctas ideas habent; háſque propriis, adæquatis, invariatíſque nominibus deſignent, ad ipſarum indagandas affectiones, & veras de iis concluſiones compingendas, tantummodò notiſſima, certiſſima, pauciſſima quædam axiomata præmittunt; hypotheſes itidem pauciſſimas præſtruunt, & rationi ſummopere conſonas, nec à ſanæ mentis quolibet recuſandas. Generationes etiam, ſeu cauſas adſignant à nemine non intelligendas facilè, non promptè admittendas. Ordinem denique ſervant exquiſitum, ut nulla propoſitio non liquidò conſequatur à priùs poſitis ac probatis; rejectis demum omnibus, utcunque veriſimilibus & ſpecioſis, quæ tali modo colligi deducíque nequeunt. Hujuſmodi verò argumentatio quin propriè ſit demonſtrativa, ſcientiámque pariat, qualis capax eſt humana mens, certiſſimam, neminem videri poſſit iturum inficias, aut addubitaturum concedere. Nam ſi, quas adſumunt, præmiſſæ ſint adeò certæ, ut nemo tam effrons ſit, illis qui contradicere ſuſtineat, aut ipſas auſit in dubium revocare; ſi legitima quoque ſit inferendi ratio, Logicæ ad infallibilem amuſſim exacta; quid obſtet quò minùs illatæ concluſiones ſint neceſſariò veræ; diſcurſus ipſe ſummo jure dicatur demonſtratio; ejúſque effectus, hoc eſt in animo reſidens habitualis cognitio, meritò habeatur ſci-

ſcientia? At nihilominus quidam adeò ſubtiles fuerunt olim, & jam ſunt, ut negaverint Mathematicas eſſe verè ſcientias, & veras in illis demonſtrationes reperiri; quibus deducti rationibus, cùm jam non vacet, proximâ lectione, diſpiciemus.

LECT. V.

PEractis quæ de Mathematum objecto, nec non de partitione ſuccurrebant differenda; poſtremâ Lectione de modo, quo circa ſuum objectum verſantur, occepi dicere. Quem utique non abs re duxi, ex inſtituta harum cum aliis diſciplinis collatione quadantenus illuſtrare. Et Mathematici quidem diſcurſûs efficacia quibus præſertim ex fontibus promanet, haud obſcurè hinc inſinuavi, ejúſque firmitatem adſerui κατασκευαστικῶς. Nunc ἀνασκευαστικῶς agendi partes obveniunt; incumbítque nobis τὰ ἐξ ἐναντίας, Mathematici ratiocinii certitudinem & præſtantiam impugnantium, impetus ſuſtinere, captionibus occurrere, tricas expedire. Ad rem.

Mathematicas ſcientias Ariſtoteles appellat ἀκριβεστάτας ἐπιστήμας. Idem ἀκριβολογίαν, exactam differendi rationem ceu peculiarem illis attribuit; hiſque conſentanea paſſim innuit, atque ſupponit; nullúſque dubito, quin ad has potiſſimùm attendendo, demonſtrationis quam primus tradidit doctrinam effinxerit, ad illam ſaltem illuſtran-

II. de Cælo. cap. 7. Metap. I. cap. ult.

dam ac confirmandam ex his pleraque depromit exemplа. Nihilominus extiterunt olim, & haud pridem inventi ſunt (etiam inter ipſos quod demiremur peripateticos, qui philoſophiæ Ariſtotelicæ nomen addixerunt ſuum, æque ipſo Ariſtotele, quantumvis invito & reclamante, videri volunt opinionis ſuæ firmamenta deſumpſiſſe) qui Mathematicas eſſe verè ſcientias, quódque veræ dentur in illis demonſtrationes, non dubitârint inficiari. Apud veteres quidem, præter Pyrrhonios, & Ἐφεκτικὸς (qui ſcientiam pariter omnem ſuſtulerunt, & poſſe qualibet de re certi quicquam affirmari gravati ſunt concedere, imo non veriti negare) præter hos, inquam, Epicuri grex Mathematicis præſertim infenſus, ipſorum principia convellere, demonſtrationes ſtuduit infirmare. Quorum ex hara prodeuntis Zenonis cujuſdam Sidonii Poſidonius aggreſſiones integro volumine perhibetur refutâſſe. Horúmque nonnulli recentiores inſiſtunt veſtigiis. Nos etſi vix πρώρην ducamus hominum illudentium aliis, nec ſuis ipſorum dictis fidentium (quique revera ſunt in philoſophia hæretici, hoc eſt αὐτοκατάκριτοι) cavillationibus refellendis multum ſubtilitatis impendere; ipſorum utcunque rationes, hoc eſt è præcipuis unam, aut alteram, excutiemus. Aggerunt primò, ut aliqua ſiat demonſtratio, de primarum propoſitionum univerſali veritate certo conſtare debet; hæc verò, ſicut ipſe docet & conteſtatur Ariſtoteles, non aliunde poteſt innoteſcere quàm ex inductione, hoc eſt ex obſervatione perpetuâ, perfectaque recenſione ſingularium. Ex inductione verò

Proclus, pag. 55.

colligi

colligi nequit universalis veritas propositionum; tum quoniam enumerando percurri nequeunt omnia singularia (quippe quæ infinita, vel indefinitè multa possunt existere) tum ideò quòd inductio nititur sensu, qui fallax & plurimis nominibus obnoxius est errori; nec idoneus proinde testis est aut index veritatis. Ergo nulla firma basis est extruendæ demonstrationi. Ad hoc palmarium ὀπτεῖον (quod nempe non Matheseos solummodò, sed omnis scientiæ certitudinem impetit) respondeo primùm illos seriò percontando, ipsorúmque pulsando conscientiam, si detrahantur ab æqualibus æqualia quòd superfutura sint æqualia, annon clarè percipiant, sibi persuasissimum habeant; num illius propositionis veritatem amplectantur assensu firmo; vel de ea quicquam addubitent, seu fidem illi habentes falli reformident. Si dicant se dubitare, protinus inepti, deliri, insani, scuticæ vel helleboro digni videbuntur omnibus, ipsíque velint nolint sibi. Sin abnuere vel tergiversari nequeunt, ergò veritatem istam certò cognoscunt; quid enim aliud designat cognitionis certitudo quàm rem cognitam animo cognoscentis manifestè veram videri, sic ut omnis formido contrarii penitus excludatur? At quomodo, sciscitaberis, obvenit aut parabitur ista certitudo? Respondeo, quicquid sit de modo, & quâcunque ratione, seu per inductionem & multiplicem experientiam colligatur, seu ab insitis animo notionibus exurgat, seu quâvis aliâ viâ comparetur axiomatum certa notitia, sufficit ejus nos intimè conscios esse; nos illam menti nostræ indelebili charactere im-

pressam experiri: Nec enim de modo cognitionis obtinendæ, vel de certitudinis origine, sed de re ipsa, num habeatur, disquirimus & disceptamus. Nescio fortè modum sentiendi, nùm idcirco non video mihi posita ob oculos, non audio quæ feriunt aures meas, non tango quæ sunt præ manibus? Ità certus sum (irrefragabili, inquam, propriæ conscientiæ testimonio certus) me propositionis istius veritatem attingere; certus es etiam tu ipse * quicquid dissimulas, aut cavillaris; sed quomodo vel unde certus evaserim, non perinde scio, nec admodum refert ut sciam; saltem indicio sit rem certò cognosci, quòd de certitudinis acquirendæ modo quærimus, & contendimus. Sed videamus utcunque de modo certitudinis hujus adipiscendæ (istorum importunitati nonnihil gratificantes.) Circa quem primò de connatis notionibus haud quicquam affirmabo (fusiorem illa quæstio dissertationem exposceret, & extra oleas propositi nostri me abriperet longiùs) id saltem adverto, si verum sit quod sanè complures non infimæ notæ philosophi, Platonicæ sc. & Stoicæ scholæ sequaces arbitrantur & contendunt acriter, ejusmodi dari φυσικὰς ἐννοίας. & προλήψεις, ceu veritatis || semina, nostris animis insitas à natura, quarum lumini non liceat oculos occludere, quarúmque vi resistere nequeamus; hoc, inquam, posito, confecta res erit, & quomodo certi sumus facilè constabit, ἀδίδακτοι nempe vel αὐτοδίδακτοι, naturæ solius, magistræ fidelis, infallibili ductu instinctúque — Semel dixit nascentibus author quicquid scire licet. — Nec aliâ ratione primis istis decretis

* Οὐ γὰρ ἔστιν ἀναγκαῖον ἅτις λέγει, ταῦτα καὶ ὑπολαμβάνειν. *Arist. adv. Heraclitum in Metaph.*

|| Ἔι τι ἀληθὲς ἡ ψυχὴ ξυνίησιν, ἀνάγκη ἀληθῆ εἶναι ταυτὰ τὰ σπέρματα ἐμπεφυτευμένα τῇ ψυχῇ. *Max. Tyrius Dissert.* 28.

tis assensum præstabimus, quàm quâ lapis terram petit, sol lucem ejaculatur, ignis fomitem suum depascit. Sed hoc modo prætermisso, transeamus ad alios, si qui sunt. Et quidem de sensu, quòd is bene secundum naturam comparatus, & affectus, ut sit in plerisque sanis, objecta quædam certò discernat; solem e. g. jam lucere, vel istum hominem adstare, velle dubitare non cordati philosophi, sed inepti nugatoris esse videtur; seipsum juxta cum aliis ludificantis; suæ, inquam conscientiæ pariter ac aliorum omnium authoritati repugnantis (nemo enim non perfectissimam συγκαταθεσιν præstat, non inconcussâ animi πληροφορίᾳ acquiescit à sensu perceptis) nè dicam hominis erga naturam injusti, ingratique; ejus nimirum vel bonitati vel potentiæ derogantis, quasi nos veri certò comprehendendi capaces aut noluerit, aut nequiverit efficere, sed maluerit in perpetua rerum caligine cæcos palpare, instabiles jactari, vagos oberrare.

Aristoteles è contrà sensûs proprium statuit ut semper verax sit. Ἡ μὲν γὰρ αἴσθησις, inquit, τῶν ἰδίων, ἀεὶ ἀληθὴς, καὶ πᾶσιν ὑπάρχει τοῖς ζώοις. Ego tamen quòd sensus aliquando fallax, hoc est, falsi judicii causa sit (& quidem interdum ferè necessaria, ac inevitabilis) cùm aut ipse malè, præter naturam & morbidè, disponitur, aut objecta minùs commodè exhibentur, non usquequaque abnuerim. Quòd verò nunquam certò scopum assequatur, hoc est, nunquam rerum objectarum species ità menti repræsentet. ut illa fidens ipsorum testimoniis falsò nequeat judicare, id verò seriò concedere, mihi nil

Lib. III. de Anima, cap. 3.

videtur aliud, ut modò dixi, quàm solenniter delirare, sibi vim inferre, naturam infamare.

In Lucullo. Meliùs apud Ciceronem disserit ille: "*Sensuum ità clara judicia & certa sunt, ut si optio naturæ nostræ detur, & ab ea Deus aliquis requirat, contentáne sit suis integris incorruptísque sensibus, an postulet melius aliquid, non videam quid quærat ampliùs — Est maxima in sensibus veritas, si & sani sunt & valentes, & omnia removentur, quæ obstant & impediunt.* Cui sententiæ quicquid ore profitetur, nemo non animo astipulatur. Sed quomodo sciam, regeres, quomodo distinguam an omnia ritè comparentur ad certò sentiendum? Aio; non est operæ tuæ scire vel distinguere; ipsius rei evidentiâ necessariò convinceris, & manus das; impulsu naturæ volens nolens in consensum adigeris. Atque dices, à sensibus multoties decipior; cùm iridi veros colores inesse, cùm remum inflecti, cùm solem propinquum & parvum, cùm quadratum longe dissitum rotundâ specie præditum sensu duce cogito. Esto; sed iridem apparere, remum aquæ insistere, solem allucere, rem specie rotundâ conspici, absoluta talia rectè percipis; relativas verò determinationes istas magnitudinis, distantiæ, figuræ discernere ac dijudicare non sensûs est negotium, sed rationis; huic igitur, non illi tuus in his, quicunque sit, error debet imputari. Enucleatiùs hæc possem, & magis ad vivum resecare; sed nolo quæstioni penitus philosophicæ meipsum altiùs immergere, vel à proposito longiùs evagari. Satis sit pro rato fixôque sumere ac supponere (id quod nemo revera non concedit, & cordicitùs

Ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὴν ἔξω λόγον· ἀμὰ πρὸς τὴν ἔσω λόγον οὐκ ἀεὶ. *I. Post. cap.* 10.

Ἡ γλῶττα τούτου φιλονεικεῖ, καθ' Εὐριπίδην, ἡ φρὴν οὐδαμῶς, οὐδ' ἡ ψυχή.

tùs amplexatur) ſenſûs adminiculo quædam, etſi non omnia, rectè perſpici, certò judicari. Jam quid ſi fieri poſſe dicamus, ut mens humana (rectè conſtituta nec emota ſicut in extremè fatuis, ac dementibus) nativâ facultate polleat univerſales propoſitiones intuendi, ſimili planè modo quo ſenſus diſcernit ſingulares? Nempe, ſicut illarum propoſitionum veritas, Socrates exiſtit, aquila volat, Bucephalus currit, à ſenſu immediate perſpicitur & quaſi dijudicatur; ità iſtas; contradictoriæ propoſitiones nequeunt eſſe ſimul veræ; quòd aliquando cœpit exiſtere, ab alio ducit originem; actio rem arguit exiſtere (vel ut effertur vulgò, non ens nihil agit) & ejuſmodi propoſitiones noſtra mens (etiam ſine prævia notione, nulloque adhibito diſcurſu, vi ſuâ nativâ) directè ſpeculatur & comperit eſſe veras; qui modus attingendi veritatem peculiari nomine vocatur νόησις, & ipſa facultas νῦς. Quid obſtat verò quo minus tali facultate percipiantur Mathematicæ demonſtrationis principia? Sed philoſophus, aies, propoſitionum omnium univerſalium, etiam primorum principiorum, veritatem non aliunde colligi docet, quàm ex inductione. Sic enim ille: Οὐ μὲν ἀλλὰ ἐκ τῆς θεωρεῖν πολλάκις τῶτο συμβαίνειν, τὸ καθόλε ἂν θεωρήσαντες ἀπόδειξιν ἔχομεν· Ἐκ γὰρ καθ' ἕκαστα πλειόνων τὸ καθόλε φῶμεν. Et expreſſius; φῶμεν δὴ, ὅτι ἡμῖν τὸ πρῶτον ἐπαγωγῇ γνωρίζειν ἀναγκαῖον· Καὶ γὰρ ἡ αἴσθησις τὸ καθόλε ἐμποιεῖ. Et adhuc, ſi fieri poteſt, manifeſtiùs in Ethicis ad Nicomachum: Ἐκ τῶν ἄνω ἀρχαὶ, ἐξ ὧν τὸ συλλογίσασθαι, οὐκ αὐτὰ ἐστὶ συλλογισμὸς,

I. Poſt. Analyt. cap. 13.

II. Anal. Poſt. cap. ult.

Lib. VI. cap. 3.

γισμὸς, ἐπαγωγὴ ἄρα. Quibus consonant ex eodem desumptæ sententiæ; nihil est in intellectu quod non fuit priùs in sensu: Intellectus adinstar se habet rasæ tabulæ; eóque redigas quæ apud eum reperiuntur talia: Νοεῖν οὐκ ἐστὶν ἄνευ φαντάσματος; Et, Ἀισθανόμενος μηδὲν οὐδὲν ἂν μάθοι, οὐδὲ ξυνίοι, &c. Ex quibus constare videtur in ea sententia versatum esse philosophum, quòd scientiarum principia sensuum testimoniis, & singularibus experimentis omnino nitantur. Quod si verum esse concedatur, vix diffitendum sit indè aliquid decedere rigidæ certitudini, nec istâ hypothesi admissâ, quodvis humanum ratiocinium supra conjecturæ probabilis fastigium adscendere. Attamen ubi quævis propositio perpetuæ experientiæ deprehenditur consentanea (præsertim quæ non circa rerum accidentia versari videtur, at præcipuas ad proprietates, & intimam ipsarum constitutionem pertinere) saltem tutissimum erit, & à nobis exiget summa prudentia promptum ut ei consensum præbeamus. Sicut enim ille, quod nos vel semel decepit indicio fidem adhibere, non injuriâ postuletur inconsultæ temeritatis, ità quod millies exploratum expectationi nostræ quàm accuratissimè respondit, præcipuæ fuerit prudentiæ ei nequaquam diffidere, sed assentiri fortiter, mordicùs adhærere; præsertim cùm assensui roborando accedat naturæ sibi nunquam dissimilis constantia; & immutabilis sapientia primæ causæ, res cunctas juxta simplices ideas formantis, & certos ad fines dirigentis: quæ consideratio penè sola conficere potest, ut de crebris experimentis

Lib. de memor. cap. 1.

Lib. III. de Anima.

mentis confirmatâ propositione, tanquam universaliter verâ, certi esse debeamus, nec ut de illa subdubitando naturam esse fluxam, & rerum auctorem sibi fore disparem suspicemur. Imò nonnunquam hac de causa, propter naturæ constantiam, vel ex unico aliquo experimento prudenter colligamus universalem propositionem, ut notat Aristoteles, & appositissimo confirmat exemplo. Ἐνία γὰρ εἰ ἑωρῶμεν οὐκ ἂν ἐζητοῦμεν, οὐχ ὡς εἰδότες τοῦ ὁρᾶν· Οἷον οἱ τὴν ἥλιον τετρυπημένην ἑωρῶμεν, καὶ τὸ φῶς διιόν· Δῆλον ἂν ἦν καὶ διά τι φωτίζει, διὰ τὸ νοεῖν μὲν χωρὶς ἀφ' ἑκάστης, νοῆσαι δ' ἅμα ὅτι ἐπὶ πασῶν οὕτως. Unde vel hoc nomine (ut hæc applicemus nostro proposito) qui pronunciatis Mathematicis assensum detrectaverit, extremæ saltem imprudentiæ, hoc est fatuitatis & amentiæ, notam haud effugerit. Nec opus est ad demonstrandam Mathematici discursûs efficaciam, ut amplius quicquam expetamus, quam ut præter dementes & insigniter stolidos, omnes eo constringantur. Veruntamen, si rem ipsam ex vero, auctoritate seclusâ, perpendamus, nulla ratio nos adiget ut fateamur Mathematica principia solâ inductione, seu perpetuo sensuum testimonio niti. Siquidem notari potest imprimis, quòd si quempiam hominem sciscitemur cur aliquòd axioma Mathematicum credat esse verum, non respondebit, opinor, eo quòd ità multoties accidisse viderit & observârit, at verò forsan nescire se causam cur credat, attamen obstinatè credere profitebitur; quod indicium est aliunde quàm ex sensu derivari, qui Mathematicis axiomatis præstatur,

I. Post. Anal. c. 32.

tur, assensum. Tum notari potest secundò, res pleraſque Mathematicas, quamvis ex sensu de illis cogitandi sumamus occasionem, ipsas tamen immediatè directèque sensum non incurrere, sed quod existant, & quales sint à sola ratione colligi dignoscique. Quis enim unquam vidit, aut ullo sensu dignovit exactam lineam rectam, aut circulum perfectum? Quis duas qualescunque res exquisitè sibi congruas, aut invicem æquales animadvertit unquam aut attigit sentiendo? Tantum abest ut ipsarum attributa sensu comperiamus, aut propositiones, in quibus attributa rebus annectuntur, universales ex eo colligamus. A sensione quidem, nec illa multiplice, sed unicâ, deduci possit hypothesium Mathematicarum possibilitas. Quod v. g. possit inter duo assignata puncta duci recta linea: Sentimus enim ab uno ad alterum utcunque fieri posse progressum, in quo si quid ineſt asperum & à rectitudine defectens, illud abradi possit, eatenus quidem manu nostrâ, donec ad sensum recta videatur effecta linea; unde pari ratione colligamus licet, ex parte rei non repugnare, ne reliquæ asperitates seu exorbitantiæ lævigentur & corrigantur, adeóque ut linea perfectè recta constituatur. Similíque ratione quòd quævis à Mathematicis tractata magnitudo possit existere, unica sensûs observatio satis attestetur; quódque possibiles sint omnes hypotheses Mathematicæ, quòd magnitudines componi, dividi, moveri, spatium replere possint, non opus est ut longa dies doceat, sed unicum sensûs indicium evicerit abundè. Ubi perstringi potest obiter illorum opinio, qui

qui figuras Mathematicas in sola mente, nec uspiam alibi rerum in naturâ volunt existere (quod equidem miror viros alioquin Matheseos apprimè peritos concedere; in quibus Blancanus, cujus hæc verba sunt: "*Quamvis igitur reipsâ non existant (entia Mathematica) quia tamen tam in mente auctoris naturæ, quam in humana eorum ideæ, tanquam exactissimi rerum typi existunt, ideò de ipsis eorum ideis, quæ per se primò intenduntur, & quæ vera sunt entia, agit Mathematicus.* Aliúsque nonnemo ex Mathematicorum sententia: "*Non est*, inquit, *in rerum naturâ ulla sphæra, quæ solum tangat κατ' εξοχὴν; semper enim parte aliquâ superficiei suæ attingit subjectam lineâ* (superficiem) *planam, quemadmodum Geometris objiciebat Protagoras, ut est apud Aristotelem.* Quæ tamen sententia planè falsa videtur, & ex superiori discursu perspicuè refutabilis; eíque quæ maximè adversatur, habetur mihi verissima; quòd nempe materiæ cuivis particulæ revera insint omnes quotquot intelligi possunt, figuræ Geometricæ; insint, inquam, actu, & perfectissimè, quamvis sensui non compareant, prorsus eodem modo, quo sub rudi marmore delitescit effigies Cæsaris, quam certè sculptor non de novo producit, at solummodo profert in apricum, aspectuíque prodit poliendo, hoc est, materiæ partes illam involventes, & obumbrantes submovendo. * Ita si particulam

Libro de natura Mathem. p. 7.

Vossius de Mathem. pag. 4.

I. Metaph. cap. 2.

* *Unde Michael Angelus, Sculptor ille nobilissimus, Sculpturam haud aliud esse dixit quam purgationem à superfluis. Demo enim à ligno aut lapide omne quod superfluum est, & reliquum erit imago quam intendis. D. Wotton de Architectura, l. 1.*

quam-

quamvis mundanæ materiæ, vacuo nusquam hiantem, manus angeli (Dei saltem potentia) dignata fuerit expolire, comparebit & oculis exponetur accurate rotunda superficies sphærica; non illa recenter procreata, sed è materiæ circumjacentis latebris, involucris & curvis eruta, detecta, patefacta. Quinimò reverâ quicquid ullo sensu attingimus, est figura Mathematica, quamvis, ut plurimùm irregularis; at nulla est ratio cur irregulares figuræ ubivis existant, regulares nusquam existere queant. Quod si ponatur hoc, (quòd sc. res Mathematicæ nequeant existere) actum erit quoque de istis ideis, seu typis in mente deformatis; erunt enim mera somnia, vel idola rerum nusquam existentium: sed hanc quæstionem jam fusiùs persequi non vacat; è diverticulo repetamus iter institutum, hoc est, inquisitionem de modo parandæ certæ Mathematicorum axiomatum notitiæ; qua de re proponam ultimò; quòd, Fieri potest ut propositionum quarundam veritas nec ab immediato mentis intuitu, nec à crebra sensûs observatione, nec ab anticipatis notionibus inclarescat, sed ex ipsâ terminorum significatione declaratâ, seu ex suppositâ manifestè possibili, & sensus suffragio consentaneâ, rei generatione, per implicitum quendam, & quasi virtualem discursum, intuitivæ notitiæ affinem, deducatur. Quomodo se res habere videtur in plerisque pronunciatis Mathematicis. E. g. Quòd totum parte suâ majus sit, aut, Pars toto minor, satis evidenter consequi videtur, ex intellecto vocabulorum *totius*, & *partis*, *majoris*, & *minoris* proprio sig-

ſignificatu. Siquidem per majus altero denotatur id, quod alteram rem continet, aut alteri rem æqualem, aliquídque præterea; per minus altero id quod, vel id cui æquale, continetur in altero ſic ut aliquid præterea ſuperſit. Totum verò ſtrictiùs deſignat id quod continet aliud, & aliquid inſuper; pars, id quòd continetur in alio, ſic ut illo ſublato remaneat inſuper aliquid. Ex quo liquet majus reſpectu totius, & minus reſpectu partis, vi ſignificationis vocabulorum, ſe habere ut genus ad ſpeciem, ſeu magis univerſalis nominis ad nomen minùs univerſale; proindéque juxta Logicæ regulas infallibiles, rectè prædicari, Totum eſt majus; Pars eſt minor.

Haud abſimiliter æquales fore magnitudines, quæ eidem alteri magnitudini æquantur, ex æqualitatis, quæcunque ſtatuatur, notione ſtatim, opinor, eluceſcet. Ut ſi cum Apollonio, cúmque * aliis nonnullis, ponatur alteri æquale deſignare, quod alteri collatum per omnia congruet, hoc eſt idem ſpatium replebit, eundem locum occupabit; indè per ἀξίωμα quandam, celerrimo mentis ictu, diſcurſúque velut inſtantaneo conſequetur dictum axioma: Poſito quippe magnitudinem quamvis A occupare locum χ, & ipſi æqualem B propterea (ob ſuppoſitam ſc. æqualitatis ſignificationem) eundem locum χ occupare; item ipſi A æqualem eſſe C, & proinde C locum χ etiam occupare, quoniam oſtenſum eſt B & C eundem locum χ occupare, erunt B & C æquales itidem ex dicta definitione vel ſignificatione æqualitatis præſuppoſitâ. Niti quidem poterit

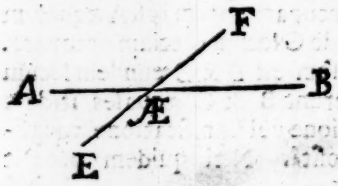
Apud Proclum, pag. 54.

* *Hobb. in Philoſ.*

hujuſ-

hujusmodi discursu certa cognitio istius axiomatis, at illum mens exerit nullo negotio, & quasi virtualiter potius quam explicitè; quem quidem discursum à præclarissimo Geometra Apollonio excogitatum sugillat Proclus, ità tamen ut si tanti res foret, & opportunè fieri posset, haud difficile videatur magnum virum à censura vindicare. E quibus obiter adverti potest axiomatum plerorumque veritatem resolvi in definitiones, seu explicationes terminorum, aut vocabulorum quibus efferuntur, & ab iis confectari ceu porismata facili quodam & tacito ratiocinio; quas tamen definitiones Geometræ propter nimiam solent evidentiam negligere. Οὐ λαμβάνει τι σημαίνει, τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον, ait Aristoteles. Simili modo pronunciata quædam per implicitum discursum elici possunt, ex suppositâ rei subjectæ generatione. Ut posito circulum oriri ex rectæ lineæ circumductu, uno rectæ illius extremo, quod centrum dicatur, fixo permanente, inde subitò, mente vix parum peragitatâ, infertur ejusmodi pronunciatum, omnes à circuli centro ad ambitum ejus ductæ rectæ lineæ sunt æquales inter se. Item quòd quæ rectæ lineæ se non intersecant præterquam in unico puncto, ex generatione rectæ lineæ præstratâ, per tacitam quandam argumentationem velut imprudentes colligere videamur. Scilicet cùm recta linea AB producta

1. Analyt. Post. cap. 10.



ducta (concipiatur ex continuo) lineam E F interſecat, non niſi in puncto Æ eam interſecare poſſit. Non opus eſt ex aliis ediſcere hæc principia, quàm ex vocabulorum quibus conſtant, definitionibus, ſeu explicationibus. Sed hactenus diſſertatum ſit adverſus præcipuum ὀπτικείρημα, quo Mathematicarum demonſtrationum certitudinem evertere conantur adverſarii; quam diſputationem claudo Luculli verbis apud Ciceronem: *Neceſſe eſt ut Lancem in libra ponderibus impoſitis deprimi, ſic animum perſpicuis cedere.*

Sed aliam præterea machinam admovent, non certitudini quidem ac evidentiæ, ſed dignitati atque præſtantiæ Mathematum detrahere ſtudentes. Quòd enim Mathematici diſcurſus non ſint demonſtrationes, ſcientificæ, potiſſimæ, perfectæque indè connituntur inferre, quòd cùm ſcire ſit rem per cauſam cognoſcere; (ſecundum Ariſtotelis effatum, ἐπίσταδζ οἰόμεθα, ὅταν εἰδῶμεν τὴν αἰτίαν) " *Mathematicus* tamen (ipſiſſima ſunt " verba Pererii, non ignobilis Peripatetici) " *neque conſiderat eſſentiam quantitatis, neque* " *affectiones ejus tractat, prout manant à tali* " *eſſentia, neque declarat eas per proprias cauſas,* " *per quas inſunt quantitati, neque conficit de-* " *monſtrationes ſuas, ex prædicatis propriis & per* " *ſe, ſed ex communibus & per accidens.* Sic illi. Quibus reſpondeo, quas demonſtrandi legum conſultiſſimus Ariſtoteles ſcientificas demonſtrationi præfigit conditiones, illas Mathematicis ratiociniis apprimè congruere. Exigit is, ut præmiſſæ ſint univerſaliter ac neceſſariò veræ; quæ verò fortior cogitari poteſt neceſſitas illâ, quam præ ſe

ferunt axiomata Mathematica, quarum æterna est, & immutabilis veritas? Vult ut primæ sint ac immediatæ, hoc est, ut nullo præcedente argumento, nullâ præviâ notione comprobentur; quis non videt hoc iisdem pronunciatis convenire, quæ ceu αὐτόπτα non comprobant, sed assumunt? Præcipit etiam ut notiores, & evidentiores sint illatâ conclusione; atqui notissima sunt & manifestissima ista decreta, nemo quisquam ut sit, qui simul ac audiverit & intellexerit, non statim assentiatur; & notiora quidem conclusionibus deductis, quia per illa, adhibito legitimo discursu, constat de harum veritate. Denique requirit, ut causæ sint conclusionis: Quæ conditio dupliciter accipi potest; vel tantùm ut in illis contineatur ratio, propter quam conclusiones necessariò veræ credantur, & assensus certò producatur (hoc est ut medius terminus assumptus obtineat qualemcunque necessariam connexionem cum terminis ingredientibus conclusionem); vel strictiùs, ut adhibitus iste medius terminus plusquam necessarius effectus, & certum signum, nempè propria causa sit attributi, vel proprietatis, quæ de subjecto prædicatur in conclusione. Quòd autem ista conditio priori modo intellecta, conveniat præmissis cujuscunque syllogismi Mathematici, non est ulla ratio quòd dubitemus, siquidem nullus est eorum qui non assensum validissimè cogit atque constringit; néque consequitur hoc ex eo, quòd præmissæ necessario veræ sunt (aliàs enim eas non admitterent Mathematici); ista verò necessitas arguit subesse terminorum essentialem

tialem inter se copulam, causalémque dependentiam, in qua fundetur; cùm accidentia sic comparata sint, ut separari possint, & accidentalia proinde prædicata non nisi contingenter subjecto tribuantur (ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχει περὶ ἕκαστον γένος, ὅσα καθ' αὑτὸ καὶ ᾗ ἕκαστον τὰ δὲ συμβεβηκότα οὐκ ἀναγκαῖα, inquit Aristot.) Et hujusmodi quidem argumentatio quælibet parit scientiam ad minus τοῦ ὅτι, censeturque demonstratio, (quòd clarissimè convincit animum, & validissimè confirmat veritatem) sed inferior & ignobilior, quoniam ex effectu vel ex signo, non ex causa, monstrat rem ità se habere. Nullus igitur discursus Mathematicus non hucusque scandit assurgitque. Cæterùm quòd posteriori modo sumpta prædicta conditio multis etiam congruat Mathematicis ratiociniis, hoc est quòd in iis adsumptus medius terminus instar habeat alicujus causæ respectu proprietatis in conclusione subjecto attributæ; primùm auctor est nobis Aristoteles (is nempe, qui sicut aliquoties dictum, demonstrationis naturam accuratissimè perspexit, & uberrimè pertractavit, & cujus proinde in hoc negotio auctoritas plurimi est facienda) is, inquam, causalium demonstrationum ex Mathematicis disciplinis exempla petit, omnium, quæ profert, clarissima, firmissimáque, forsan & sola. E. g. pro demonstrationis ex causa utraque materiali & formali desumptæ exemplo adducit illud celebre theorema, quo sc. angulus in semicirculo rectus demonstratur. *Et differtè scientias mixtas, vel Physico-mathematicas, quas vocat αἰσθητικὰς, cum puris con-

I. Post. cap. 6.

II. Post. cap. 11.

**I. Post. cap. 13.*

ferens ità proloquitur: Ἐνταῦθα γὰρ τὸ μὲν ὅτι τῶν αἰσθητῶν εἰδέναι, τὸ δὲ διότι τῶν Μαθηματικῶν. Item rursus de primæ figuræ syllogismis verba faciens; Αἴτιαι γὰρ (inquit) Μαθηματικαὶ τῶν ὑπεκειμένων διὰ τούτου φέρουσι τὰς ἀποδείξεις, καὶ γνῶσιν, ὡς εἰπεῖν, ὅσαι τὸ διότι ποιοῦσι καὶ τιὼ σκέψιν. Ubi demonstrationes Mathematicas supponit esse præsertim dioticas, seu causales: Verùm, auctoritate dimissâ, ut ex rei veritate disseramus, Mathematicas demonstrationes fore cum primis causales, indè videtur constare, quòd conclusiones suas non adstruant aliunde, quàm ex pronunciatis præcipuas & generalissimas omnium quantitatum affectiones exhibentibus; & ex definitionibus specialium magnitudinum generationes constitutivas, & essentiales passiones declarantibus. Unde quæ ex ejusmodi præstratis principiis emergunt propositiones, ex intimis istarum rerum essentiis, & causis promanent oportet. At nimio prolixior sim & gravis vestræ patientiæ, si quomodo causales sunt ex principiis istis Mathematicis ortæ demonstrationes, nunc aggrederer distinctiùs explicare; nec non quod hujusce disputationis reliquum est nunc absolverem. Itaque reservo.

1. Post. cap. 14.

LECT. VI.

MAthematicæ evidentiæ ac certitudini consultum est aliquatenus lectione proximè superiori; restat ut ipsarum dignitati

tati ſuccurramus, quódque reverâ ſcientificæ ſint, potiſſimæ, cauſales, & quomodo diſtinctiùs exponamus; necnon ut præcipuis, quas adverſarii pertendunt, inſtantiis occurramus. Quod modum attinet cauſalitatis, notemus imprimis cum Ariſtotele, quòd in omni demonſtrativa ſcientia tria potiſſimùm conſiderentur; ſubjectum, cujus illa neceſſarias paſſiones contemplatur, inveſtigat, demonſtrat; communia pronunciata, quorum ſubſidio quærit, & demonſtrat paſſiones de ſubjecto; & paſſiones ipſæ, de ſubjecto demonſtrandæ. Πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη *l. Poſt.* δεῖ τριῶν ἐστιν, ὅσα τε ἔστι τὰ γένη ἃ δεικνύουσιν· Ταῦτα *cap. 10.* δ' ἐστὶ, τὸ γένος, ἃ τ' καθ' αὐτὰ πάθημάτων ἐστὶ θεωρητικὴ· Καὶ τὰ κοινὰ, ἃ λέγομεν, ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι· Καὶ τρίτον, τὰ πάθη, ὧν τὸ σημαινόμενον ἕκαστον λαμβάνει. De ſubjecto Mathematicarum demonſtrationum nihil occurrit admodum obſervabile, niſi quòd id ſemper aliqua ſit ſpecies magnitudinis, ſpecificata, determinata, diſcreta ab aliis per aliquam reciprocam proprietatem, ut mox explicabimus; ex. g. Linea recta, angulus, triangulum, circulus, cubus, ſphæra, &c. ſunt ſubjecta demonſtrationum Mathematicarum. De paſſionibus verò demonſtrandis obſervo, quòd illæ duplicis generis ſint; communes & propriæ. Communes ſunt, quæ ſubjecto conveniunt, neceſſariò quidem, at non ſoli, atque ità ut aliis quoque ſubjectis verè tribui poſſint. Ità triangulo iſoſceli convenit habere tres angulos pares duobus rectis, quadrato habere quatuor rectos angulos circuli circumferentiæ ſecari à rectâ linea non niſi

duobus punctis; nam etiam scaleno triangulo accidit habere tres angulos pares duobus rectis, & parallelogrammo oblongo habere quatuor angulos rectos; & innumeris curvis lineis, præter circuli circumferentiam, non secari a rectâ linea præterquam duobus punctis. Unde patet hujusmodi passiones non ex speciali natura subjecti sui, sed ex magis universali quâpiam ratione promanare, quódque conveniant illi non immediatè, sed quatenus illud sub alio superiori, latioríque genere magnitudinis comprehenditur. Dein hujusmodi passiones neutiquam ingredi definitionem illius specialis subjecti, nec illi determinando sufficere, quum ampliores sint, & illis positis subjectum poni minimè consequatur. Passiones autem propriæ soli subjecto conveniunt, cúmque eo reciprocantur omnino, sic ut illis positis etiam subjectum necessariò statuatur. Ità circulo soli convenit, inter omnes figuras, ut pares radios habeat, & quæcunque figura pares è centro ad perimetrum radios emittit, est circulus. Eidémque sic congruit ut assumpto in diametro puncto quolibet, ac indè excitatâ ad dictam diametrum perpendiculari rectâ, quæ circumferentiæ occurrat, interceptæ rectam quadratum æquetur rectangulo ex segmentis diametri (vel ut intercepta recta sit media proportionalis inter segmenta diametri) congruit, inquam, hoc circulo, & cuicunque figuræ convenit hoc, illa circulus est. Item ut ab extremitate diametri ductæ ad ejus ambitum rectæ lineæ rectos semper angulos constituant, convenit circulo; & vicissim cuicunque figuræ convenit ea passio,

illa

illa circulus erit. Ità quoque parallelis rectis lineis reciprocè convenit, ut illæ indefinitè productæ nunquam concurrant; ut illis insistens alia recta faciat angulos alternos æquales, vel externos internis æquales, vel internos æquales duobus rectis; útque interceptæ quælibet rectæ, ad æquales angulos ductæ, sint æquales inter se; ac ut interceptæ æquales rectæ faciant cum illis æquales angulos. Ex quibus constat, ab hujusmodi passionum qualibet subjectum determinari, & circumscribi; & proinde quamlibet earum subjecto definiendo rectè supponi, vel adsumi posse; quippe cùm hæ tam essentiali, arcto, reciproco nexu inter se cohæreant, ut unâ positâ reliquæ necessariò consequantur. Indè quoque liquet has passiones ex parte rei fore ὁμοστοίχους, coordinatas, & simul-taneas naturâ (ἀντιστρεφούσας κατὰ τὴν τοῦ εἶναι ἀκολούθησιν) nec unam ab alia magìs, quàm illam ab hac dependere. Quòd & indè clarè confirmatur, quoniam habito ad istas passiones respectu subjectum diversimodè potest generari; ut circulus nedum ex rotatu lineæ rectæ, sed etiam ex ductu perpendicularium, ex angulorum rectorum effectione, tótque aliis omnino modis, quot habet ejusmodi reciprocas passiones. Déque reliquis magnitudinibus specialibus eadem est ratio. Sin una quædam talis passio præ aliis arbitrariè suscipiatur ad subjecti definitionem, eatenus illa causæ rationem subit, aliarum respectu,

Refragatur his Aristoteles. Top. VI. 5. Πλείους (*inquiens*) οὐκ ἐνδέχεται τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοῦ ὁρισμοὺς εἶναι. *Sed nihilominus, juxta dictum ipsius, sæpiùs at nunquam satìs laudatum*, ὅσιον προτιμᾶν τὴν ἀλήθειαν: *nam isthic labi Philosophum mihi indubium est.*

quoniam illius ceu medii interventu reliquæ per neceſſariam conſequentiam reſultant, & notificantur. Ut ſi circulus definiatur ex paritate radiorum, indè demonſtrabitur interceptam perpendicularis quadratum æquari rectangulo ex ſegmentis diametri; & quòd anguli in ſemicirculo recti ſint; erítque proinde paritas iſta harum paſſionum origo, quoad modum noſtri diſcurſûs. Sin, ut fieri poſſit, circulus definiretur figura tali proprietate prædita, quòd aſſumptâ quâvis rectâ, erectáque utcunque additam perpendiculari ad figuræ perimetrum terminatâ, quadratum iſtius perpendicularis æquetur rectangulo ex ſegmentis dictæ rectæ; vel ſi definiatur circulus ejuſmodi figura, in quâ ſumptâ quávis rectâ, rectæ ab ejus extremis ad figuræ perimetrum quomodocunque ductæ rectos angulos conſtituant; ex harum poſtremarum definitionum utralibet prior illa paſſio, nempe paritas radiorum, facilè deducatur & demonſtretur; erítque propterea paritas iſta velut effectus dictarum paſſionum reſpectivè, ejúſque cognitio dependebit ab illarum notitiâ diſcurſui præſtratâ. Paritérque, ſi definiantur rectæ parallelæ ab æqualitate angulorum alternorum factorum ab inſiſtente recta, ex illá ceu cauſa reliquæ priùs memoratæ parallelarum proprietates orientur. Haud diffiteor ex his reciprocis paſſionibus alias quaſdam aliis ſimpliciores & evidentiores; magis obvias & manifeſtiùs poſſibiles videri, quomodo paritas radiorum reliquis circuli, quas commemoravi, proprietatibus facilior videtur & clarior, quoniam ex generatione per radii circumductum facillimè

limè effectibili planè deducitur: Et Euclidi visa est, (licet infeliciter, ut nonnulli putant, in quibus ipse propter multas rationes nomen profiteor meum) negativa proprietas ista parallelarum, quòd nunquam coëant quantumvis protractæ, omnium, quæ parallelis multæ competunt, proprietatum facillima, clarissimáque; nec non agnosco quòd expediat à facilioribus, magísque familiaribus istis passionibus argumentandi initium sumere, hoc est, ab illis potiùs quàm ab aliis quod contemplamur subjectum definire; circulum, inquam, e. g. potiùs ex radiorum paritate, quàm ex quadrati cum rectangulo, ut supradictum, æqualitate definire: Quoad captum nostrum, fateor, hoc præstet; ac perinde fuerit ad ipsius rei naturam attendendo, unde discursum auspicemur; quemcunque catenæ annulum apprehendas, tota sequetur, at illum qui magis obvius & præ manibus. ex usu censemus arripere. Se res habet ut in progressu circulari; à quocunque circumferentiæ puncto ordiaris cursum, universam emetieris. Talis est revera nec alia causalitas & dependentia mutua terminorum demonstrationis Mathematicæ; arctissima scilicet & intima connexio ipsorum inter se; quæ causalitas formalis utcunque dici potest, eò quod ex una proprietate primitus assumpta reliquæ passiones velut ex forma resultant: Nec aliam in rerum natura causalitatem existere puto, in qua necessaria consecutio fundetur. Crepant quidem Logici demonstrationes nescio quas ab externis causis efficiente vel finali, cujusmodi tamen nullum genuinum exemplum exhibent, vel exhibere possunt, imò

imò quales, ut ego quidem existimo, repugnat dari. Nec enim ullius externæ, puta efficientis, causæ cum suo effectu talis esse potest connexio (saltem à nobis nulla talis intelligi potest) propter quam à posita causa efficiente necessariò poni effectum; vel ab effectu posito determinatam aliquam causam statui, strictè loquendo, licebit arguere. Siquidem in rerum natura nulla datur (quæ philosophicæ sit σχέσεως) efficiens causa prorsus necessaria; omnis enim efficientis causæ tum actio, tum actionem consequens effectus pendet à liberrimâ voluntate, summâque potestate Dei O. M. qui pro suo arbitratu prohibere potest influxum & efficaciam cujuscunque causæ; itémque nullus est effectus sic uni causæ alligatus, quin ab aliis forsan innumeris possit produci. Ergo fieri potest, ut hujusmodi causa sit, nec effectus subsequatur; vel ut effectus sit, & nulla peculiaris causa quicquam conferat ad ejus existentiam: Unde ab efficiente causa ad effectum, vel permutatim ab effectu ad causam nulla datur argumentatio legitimè necessaria. e. g. Ex eo quòd ignis sit, haud consequitur necessariò fomitem appositum ustulari, vel fumum emitti; de facto secus accidisse certis ex historiis habemus compertum. Neque vicissim ex cinere vel fumo necessaria colligatur ignis existentia: Nam posse cinerem & fumum immediatè creari à Deo, vel aliis modis produci quis addubitet? Fortè dices cinerem & fumum relationem ad ignem intrinsecam connotare; respondeo breviter, ex eo supposito fiet ut procedat argumentatio non à causa efficiente vel effectu, sed à causa vel cau-

causato formali; at saltem ejusdem naturæ res, eadémque specifice, ut loquuntur, qualis est cinis, vel fumus potest citra ignis efficientiam existere, aliisque ex causis oriri; id quod facit ad nostrum propositum. Nec ex altitudine solis, omnino demonstret Astronomus ejus moram supra horizontem, aut tempus diei præterlapsum; legimus enim aliquando fixum in cœlo solem, legimus & subinde retrogressum. Item ex eo (exemplum est demonstrationis ab efficiente causa celeberrimum, & tritissimum apud Aristotelem, & reliquos Logicæ scriptores) quòd tellus intercedat soli, non sequitur lunam pati luminis defectum; nam volente Deo solares radii telluris corpus permeabunt; aut à recto tramite declinantes, adeóque terræ non occursantes, Lunam attingent, vel aliunde luna luce perfundetur: Imò posito sole non ponitur lumen; nam sanè cum Dominus noster oppeteret mortem, & mundi lux melior occideret, ipse sol horrore facti perculsus, & pudore quasi suffusus, suos intra se radios recepit, & faciem suam occultavit; sol, inquam, meridianus deliquium perpessus est, nullâ lunâ intercipiente lucem ejus, nullâ nube ipsius fulgorem offuscante. Ergo non ex intersectu corporis opaci concludi poterit eclipsis, nec vicissim ex hac iste: juxta naturæ fateor legem & consuetudinem nunquam non ex talibus causis tales prodeunt effectus; quò condonandum sit Aristoteli naturam arbitranti intrinsecæ necessitati suppositam, nec externæ superiori potestati obnoxiam; sed revera aliud est accidere naturaliter, aliud necessariò existere. Enimverò

Ἡ σελήνη ἐπιπροσθεῖ ὑπὸ τῆς γῆς. Τὸ δὲ ἐπιπροσθούμενον ἐκλείπει· Ἡ σελήνη ἄρα ἐκλείπει. *Philop. in I. Post.*

verò necessariæ propositiones veritatem habent universalem, immutabilem, æternam, arbitrio nulli subditam, nullâ potentiâ impediendam. Aristoteles. Ἐξ ἀνάγκης ἐστὶ τὸ ἐπιστητὸν· Ἀΐδιον ἄρα· Τὰ ἐξ ἀνάγκης ὄντα, ἁπλῶς ἀΐδια πάντα· Τὰ δὲ ἀΐδια ἀγέννητα, καὶ ἄφθαρτα. Idem. Ἀνάγκη καὶ τὸ συμπέρασμα ἀΐδιον εἶναι τῆς ἀποδείξεως. Itaque quoniam agentium efficacia sisti, vel immutari potest, & effectus omnis à variis causis potest proficisci, non dabitur ulla demonstratio ab efficiente causa, vel ab effectu. Et par est ratio de causa finali, & mediis ei respondentibus; posito nempe fine, neutiquam consequuntur media quævis determinata; neque positis mediis finis resultabit necessariò. Ex quibus consectatur nihil esse quòd miremur nullas in Geometria dari demonstrationes à causâ effectrice, vel finali deductas, sed omnes à forma, & internâ rei constitutione per definitionem expressa procedere. Nec non iniquè facere eos, qui tales à Mathematicis demonstrationes exigunt, quales ipsi nè quidem in somnis ullas viderint, qualiúmque nuspiam extet vola, vel vestigium. Sed de ista re satis. Ex antedictis verò consequitur syllogismum in quo una passio essentialis cum alia connectitur, vel ab alia infertur, esse demonstrationem causalem, ex causa nempe formali deductam. In exemplum proponatur talis syllogismus. In omni figura pares habente radios quadratum ex perpendiculari æquatur rectangulo ex segmentis diametri. Figura Z pares habet radios (ex hypothesi sc. aut ex ostensis) ergo in figura Z quadratum ex perpendiculari

VI. Ethicorum. cap. 3.

I. Anal. Post. cap. 8.

diculari æquatur rectangulo ex segmentis diametri. Ubi passio quædam, æqualitas sc. quadrati cum rectangulo, demonstratur de subjectâ figurâ, per æqualitatem radiorum; quæ respectu ejus est causa formalis, ut supra expositum est. Talis etiam sit hic syllogismus. Rectis lineis nunquam convenientibus insistens recta linea facit angulos alternos æquales. At rectæ lineæ A, B, nunquam conveniunt inter se (ex hypothesi puta, vel ex prius demonstratis) ergo, rectis lineis A, B, insistens recta linea facit angulos alternos æquales. Sed de passionibus demonstrandis hæc sufficiant animadversa. Quoad pronunciata observo, quod illa vel omnibus quantis lineis, superficiebus, corporibus, angulis, & propter hæc numeris, motibus, ponderibus, temporibus, & reliquis secundariò quantis conveniunt; vel specialibus quantis peculiariter congruunt; illa communia nuncupare licet, hæc propria. Communia pronunciata quasdam indicant omnium quantitatum essentiales passiones adeò simplices & claras, ut vix per alias ex hypothesi priores demonstrari possint, saltem demonstratione non indigeant. Ità quantis omnibus absolutè convenit, ac de iis pronunciari potest, quod quantum divisibile est in quanta homogenea (hoc est linea in lineas, superficies in superficies, corpus in corpora;) quanta homogenea componi vel sibi addi possunt. Quanto minori subtrahi potest æquale quantum à majore quanto. Omnis magnitudo spatium replere potest adæquatum sibi. Omnis magnitudo determinati situs capax est, potest quiescere, potest moveri,

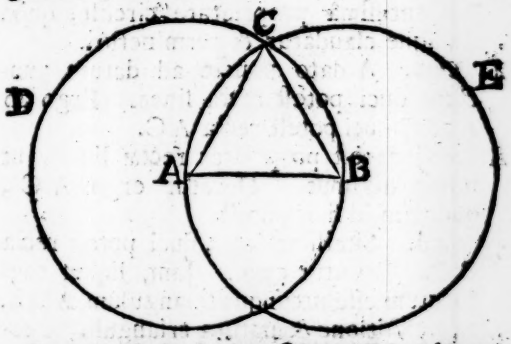
veri, motu quovis; directo, in gyrum; uniformi, difformi; veloce, tardo. Hujuſmodi quidem abſoluta pronunciata ſubticentur à Geometris ob nimiam evidentiam; at ſubintelligi debent ob alia pronunciata, propterque definitiones magnitudinum ſpecialium, & propter cujuſquemodi hypotheſes. E. g. cùm dicitur, magnitudines, quæ congruunt inter ſe, vel quæ idem ſpatium occupare poſſunt, æquantur, ſupponitur magnitudines poſſe ſpatium occupare. Cùm definitur angulus rectus ex tali inſiſtentia rectæ lineæ ſuper rectam, ſupponitur rectam poſſe inſiſtere, vel talem poſitionem obtinere. Cùm definitur circulus ex rectæ lineæ circumductu, ſubſumitur ut poſſibilis iſte motus; iſta gyratio. Quantis autem inter ſe comparatis conveniunt & attribui poſſunt ejuſmodi paſſiones; æqualitas duorum quantorum conſequens eorum æqualitatem ad aliud; æqualitas ex congruentia, vel ejuſdem ſpatii completione reſultans; æqualitas ex compoſitione, vel diviſione; ex additione vel ſubtractione æqualium emergens, & ſimiles. Haud abſimiliter pronunciata propria quantorum ſpecialium exprimunt paſſiones, quas ob ſimplicitatem & evidentiam ſuam demonſtrare non liceat, aut non expediat. Ut e. g. rectæ lineæ convenit, & de ea pronunciari poteſt, quod ab alia recta linea non interſecetur præterquam in uno puncto, quod non habet aliquam communem partem cum altera recta; quod non poteſt cum unica altera recta ſpatium concludere vel figuram conſtituere. Etiam ei convenit, ut poſſit duobus quibuſvis aſſignatis punctis interjacere;

cere; ut possit in continuum protrahi utcunque vel indefinitè; ut possit esse radius circuli (quæ sanè postulant Geometræ, sed possent audacter pronunciare, sunt enim passiones rectæ lineæ, ex ejus, quæcunque sit, definitione facilè deducibiles) ista verò pronunciata fortè possint, ut in præcedentibus exposui, qualitercunque demonstrari, sed quia veritas ipsorum facillimè perspicitur, & conceditur ab omnibus, non est necesse, nec expedit ut id fiat. Cùm igitur hæc pronunciata contineant passiones essentiales aut quantis omnibus, aut specialibus certè quibusdam, & proinde necessariò cohærentes inter se (intelligo quasdam quibusdam respectivè) liquet illas ad demonstrationem rectè adhiberi, ac ex iis confici demonstrationes causales. Exemplo sit ejusmodi syllogismus. (Quæ congruunt inter se, sunt eidem æqualia; Magnitudines A, B, congruunt inter se (ex hypothesi, vel ex ante demonstratis) ergo, Magnitudines A, B, sunt eidem æquales. Ubi duarum magnitudinum æqualitas respectu ejusdem deducitur ex ejus causa (quasi) formali, sc. ex congruentia istarum magnitudinum. Sed de pronunciatis impræsentiarum plura non addam, tantum dico quòd cùm ex his, hoc est ex generalibus omnium magnitudinum affectionibus, & ex specialium magnitudinum proprietatibus reciprocis deriventur omnia theoremata Mathematica, satis apparet illa suis ex causis demonstrari. Igitur opportunum est ut pergam ad id quod reliquum est ex disputatione contra Mathematicæ demonstrationis impugnatores instituta. Ut nempe quas obtendunt instantias bre-

breviter expendam. Primò ipſum Geometriæ caput impetunt, & primæ elementorum propoſitionis probationem negant ex propriis cauſis deduci, adeóque nec illam potiſſimâ ratione demonſtrari: Aiunt enim in illa triangulum fore æquilaterum ex eo inferri, quòd inter duos circulos æquales conſtructum ſit, hoc verò triangulo æquilatero non per ſe, ſed ex accidente convenire, futurúmque id æquilaterum, etiam ſi duo iſti circuli nequaquam ducerentur, aut abeſſent omnino. Ad hanc inſtantiam & alias conſimiles à variis diverſimodè reſpondetur, & quidem ab omnibus ſatis appoſitè: Ego nihil mutuabor, & aliorum reſponſis prætermiſſis meo modo reſpondeo, primùm adver-
1. tendo multipliciter accipi demonſtrationis vocabulum. 1. Pro ſingulo quovis ſyllogiſmo ſcientifico (juxta definitionem philoſophi, ἀποδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς) hæc demonſtratio ſimplex appellari poſſit. 2. Pro congerie vel ſyſtemate plurium ejuſmodi ſyllogiſmorum ſerie quâdam inter ſe connexorum ac ad unius propoſitionis probationem conſpirantium. Qualis demonſtratio non incongruè dici poſſit compoſita. 3. Pro ultimo illo ſyllogiſmo, quo propoſita concluſio firmatur immediatè, ad quem reliqui ſyllogiſmo conducunt, & colli-
2. mant. Quò poſito, ſubnoto, quòd ſi ſinguli ſyllogiſmi compoſitæ demonſtrationis ſint cauſales, præſertim ultimus, quo velut extremo ictu lapis confringitur, etiam tota demonſtratio compoſita meritò cenſeri debet
3. cauſalis & ſcientifica. Præterea adverto, quòd adſumpta quædam vel probata, in de-

curſu

curſu totius demonſtrationis, reſpectu unius alicujus (v. g. ultimæ) concluſionis accidentalia videri poſſunt, quæ tamen aliarum reſpectu propria ſint & eſſentialia; quódque non opus ſit, ut omnia prædicata in compoſitæ demonſtrationis ſerie adhibita per ſe conveniant extremæ concluſionis ſubjecto, verùm ſufficit ut unumquodque ſuæ propriæ concluſionis ſubjecto taliter congruat. Quibus ex obſervatis pleræque omnes contra Mathematicas demonſtrationes allatæ inſtantiæ diſſolvi poſſunt. Adeóque ſi ſinguli ſyllogiſmi in dictæ primæ elementorum propoſitionis ſeu conſtructionem, ſeu demonſtrationem adductæ ſint demonſtrationes ſimpliciter ſcientificæ, cenſeri debeat ipſa propoſitio ſcientificè demonſtrata. Quapropter inſpiciemus illos; at brevitatis cauſâ pro ſyllogiſmis enthymemata ſubjiciemus, & conſequentiæ neceſſitatem inſinuabimus. Ipſa propoſitio (quòd opinor nemini è vobis ignotum) talis eſt.



Super quâvis datâ rectâ (AB) triangulum æquilaterum conſtituere. (vel in theo-

rematis formam redacta, quod perinde est, siquidem omne problema possibile pro theoremate potest haberi, quatenus ista possibilitas est demonstrabilis; theorematicè, inquam, proposita talis erit, Potest super quavis datâ recta (ut A B) triangulum æquilaterum constitui.)

1. *Enthymema.* Quævis recta potest esse radius circuli. Ergo, A B esse radius circuli (cujus centrum A.)

Antecedens continet essentialem proprietatem rectæ lineæ, ut supra insinuatum est.

2. *Enth.* Eâdem ratione, centro B, intervallo A circulus describi potest. Supponantur igitur ducti circuli B C D, A C E; quoniam ostensum est hoc fieri posse.

3. *Enth.* Duo æquales circuli communi radio descripti se mutuo intersecabunt. Ergo, circuli B C D, A C E se intersecabunt, (puta in puncto C.)

Antecedens nimio nimis est manifesta, ex evidentissimâ proprietate circuli, quòd undique claudatur & terminetur.

4. *Enth.* A dato puncto ad datum punctum duci potest recta linea. Ergo ab A ad C duci potest recta A C.

Antecedens est proprietas rectæ lineæ, ut antea diximus. Ducatur ergo A C, quoniam id fieri potest.

5. *Enth.* Simili ratione, duci potest recta B C. Ducatur ergo. Jam, liquet constitutum esse utcunque triangulum A C B, ex definitione & natura trianguli. Peractaque est constructio problematis. Demonstrandum restat triangulum A C B esse æqui-

æquilaterum, quódque reliquum eſt ſuſcepti negotii converti poteſt in hujuſmodi theorema. Triangulum conſtitutum ex rectis, à centris duorum æqualium circulorum communi radio deſcriptorum ad ipſorum interſectionem ductis, eſt æquilaterum. Cui demonſtrando theoremati inſerviunt hæc enthymemata.

Rectæ lineæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ ſunt æquales inter ſe. Ergo rectæ A C, A B, ſunt æquales. In antecedente eſt notiſſima proprietas circuli, quâ definitur. 1.

Eodem diſcurſu, rectæ B C, A B, æquantur. 2.

Quæ eidem æqualia ſunt, inter ſe ſunt æqualia. Ergo, rectæ A C, B C, æquales ſunt inter ſe (quippe quæ oſtenſæ ſunt æquales eidem A B). 3.

Antecedens eſt evidentiſſima, nobiliſſimáque proprietas comparatarum magnitudinum, de qua ſupra dictum.

Sequitur ultimus decretorius & rem totam conficiens ſyllogiſmus. Omne triangulum habens æqualia tria latera eſt æquilaterum. Triangulum A B C (ex modò demonſtratis) habet æqualia tria latera. Ergo, Triangulum A B C eſt æquilaterum. Major eſt definitio trianguli æquilateri; & evidentiſſimè continetur in præmiſſis cauſa concluſionis. Quæ ſit enim vel fingi poſſit cauſa, cur triangulum A B C ſit æquilaterum propior & intimior hâc, quòd habeat æqualia tria latera, equidem nequeo conjectare. Vidimus igitur ſyllogiſmos omnes 4.

hujus propositionis tam constructioni, quàm demonstrationi constructionis inservientes esse totidem veras demonstrationes; utpote ex essentialibus rerum subjectarum attributis deductas; ultimum præsertim esse summopere causalem & scientificum. Est igitur illi, ut spero, instantiæ factum satìs. Verùm alteram, si bene memini Pererius & alii producunt instantiam, & celebrem istam propositionem, quæ est trigesima secunda primi elementi, sugillant ut minùs scientificè demonstratam. Nam & hìc aiunt ad demonstrandum omnes angulos trianguli duobus rectis exæquari, protrahi latus unum, & alteri parallelum duci, quæ ut fiant omnino extrinsecum est & accidentale proposito negotio, nec ullatenus ex illis dependet angulorum, qui in triangulo sunt, æqualitas astruenda. Ergo, ista demonstratio non procedit ex iis, quæ per se, nec adeò parit scientiam. Scilicet hi subtilissimi, vel fastidiosissimi potiùs argutatores ratiocinia ni fallor desiderant absque medio quovis invento vel adsumpto; argumentationem expetunt sine argumento. Aristoteles quidem argumenta rejicit ἑτερογενῆ, ex alterius naturæ scientia deprompta; hi cuncta respuere videntur, rem probari volunt ex se, nihil aliunde patiuntur adscisci.

1. Sed ad rem, 1. Saltem Aristoteles ipsissimam hanc propositionem adducit in exemplum eorum, quæ per se insunt subjecto, & per causam ostenduntur, disertis his verbis. Ἕκαστον δὲ ἐπιστάμεθα μὴ κατὰ συμβεβηκὸς, ὅταν καθ' ἐκεῖνο γινώσκομεν, καθ' ὃ ὑπάρχει ἐκ τῶν ἀρχῶν τῶν ἐκείνου, ᾗ ἐκεῖνο· οἷ τὸ

I. Post. Anal. cap. 9.

τὸ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν, ᾧ ὑπάρχει καθ' αὑτὸ τὸ εἰρημένον, ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ τόπου.

Quòd rem ipſam ſpectat repono breviter, quoniam triangulum ex rectis lineis conſtituitur, rectæ lineæ proprietates eatenus ad ipſum pertinent. Rectæ verò lineæ proprietas eſt, ut protrahi poſſit; ergo protractio iſta non eſt omnino triangulo accidentaria vel extrinſeca. Pariter & rectæ lineæ proprietas eſt, anteà demonſtrata, ei ut poſſit per quodvis punctum extra ipſum duci altera parallela recta. Ergo & hoc per ſe convenit triangulo, quatenus ipſius conſtitutionem ingrediuntur rectæ lineæ, ſeu latera ipſius. Porro, quòd vera ſit iſta propoſitio non diffitentur, opinor, adverſarii; nec ideò quòd demonſtrabilis. Ergo debet adſumi medium aliquod ei demonſtrando. Adſumitur angulus externus, & in duas partes divifibilis oſtenditur æquales internis & oppoſitis duobus angulis trianguli; unde planiſſimè ſequitur omnes tres internos duobus rectis æquari. Quodnam adſumi poſſet medium convenientius, aut intimius equidem non video, vel potiùs video nullum poſſe. Adhuc reſpondeo ſicut ad priorem inſtantiam. Si ſyllogiſmi ſingulares examinentur, ex quibus aggregatur iſtius trigeſimæ ſecundæ propoſitionis demonſtratio, perſpicietur illorum totam vim inniti definitionibus, vel communibus pronunciatis, immediatè ſcilicet aut mediatè. Unde conſtabit iſtas eſſe demonſtrationes ſcientificas; idcircóque totam ex iis conflatam demonſtrationem, ac ultimum ſyllogiſmum, quo propoſitio immediatè demonſtratur.

2.

3.

4.

monſtratur. Eodem modo ad omnes, quæ proferri poſſunt, inſtantiàs facilè poterit reſponderi.

Ut longiuſculam hanc, & ſanè vereor ut nimis tumultuariam, quippe properantiùs excogitatam & effuſam, diſſertationem aliquando finiam; mihi videtur, quòd omnis diſcurſus certus ac evidens, juxta Logicæ regulas irrefragabiles, fluens ex principiis univerſaliter & perpetuò veris, adeóque in quo neceſſaria terminorum connexio reperitur, eſt propriiſſimè, potiſſimè, ſcientificentiſſiméque demonſtratio. Quódque omnis alia, præter iſtam connexionem ſuperiùs explicatam, cauſalitas, huic applicabilis negotio, ſit pura puta fictio, nullo argumento fulta, nullo exemplo confirmata; quódque demonſtrationes (quanquam aliæ aliis brevitate, concinnitate, proximitate verſus prima principia, & ſimilibus præcellant virtutibus) evidentiâ ſaltem, certitudine, neceſſitate, terminorum eſſentiali connexione & dependentiâ mutuâ ſibi cunctæ pares ſint; denique quòd Mathematica ratiocinia ſint perfectiſſimæ demonſtrationes.

Accuratiùs hæc certè, luculentiùs & uberiùs expoſuiſſem, niſi quòd importunè obvenientes aliæ quædam occupatiunculæ avocarint animum, & meditandi mihi tempus præciderint; nec non ab aliquot diebus languor quidam (non adeò gravis, at non nihil incommodus) corpuſculum invaſerit; qui facit ut cùm ipſe non admodum valeam, vos ſaltem, Optimi Auditores, diſcupiam valere plurimùm.

Hìc

Hîc desitum est hoc anno, professionis institutæ primo, cui nimirum accidit unicum habere terminum. Amplificando numero, chartæque, quæ supereſt, propiùs adimplendæ, duas mutuò desumam (vel potiùs gratis adjiciam) lectiones, anni primas subsequentis.

LECT. VII.

MOS est, Academici, cum humanitate conspirans optimè, nec qui magis alibi quàm apud vos usu frequente confirmatus invalescit, post diuturnam absentiam oblatos in conspectum amicos ardentiori quodam affectu complecti, profusiori garrulitate compellare. Cui ut ego consuetudini insisterem hodie, si mihi vel mediocrem aut natura concessisset, aut studium comparâsset dicendi facultatem, equidem permulta fateor haud segniter urgerent. Nam & affectûs stimulos acerrimi persentio; & orationis argumento instructus sum splendidissimo juxta ac uberrimo, ut pro comperta nempe vestra eximia in me benevolentia meritas grates persolverem; ut enixum in præclaras disciplinas studium prædicarem, ut dignam viris philosophis patientiam vestram collaudarem, & congratularer vobis. Sed quum ingenium meum, ad dicendum perquam inhabile, ineptúmque reclamet vehementiùs, & hujus instituti nostri ratio non nihil advèrsetur, &

vos, opinor, ipſi non Rhetoricis blandimentis demulcendas aures, ſed ad philoſophicam potiùs ſeveritatem compoſitos animos huc adducatis, non tam verba dari vobis, quàm rerum ſcientiam exhiberi cupientes, in patheticos excurſus prorumpentem cohibebo linguam, & ab omni procœmio prorſus temperabo. Vos tantùm, (Optimi, Humaniſſimíque Auditores) omnibus gratitudinis, & benevolentiæ ulnis officiosè complectens, plurimam dicens vobis & animitùs vovens ſalutem, congreſſúmque denuò noſtrum lætum vobis exoptans & auſpicatum, ad muneri noſtro debitum opus me protinus accingam. Perſequar autem elapſo proximè termino inceptum iter, quámque tum exorſus ſum telam porrò conabor detexere. Placeat igitur vobis, mihi quid tunc agendum propoſuerim, & in exequendo propoſito quouſque proceſſerim recordari. Aggreſſus nempe ſum veſtibulum quoddam condere, Mathematicis, quæ mihi pertractandæ veniunt, diſciplinis præſtruendum; hoc eſt generalia quædam de illis quaſi prolegomena delibare. Et quidem ipſarum imprimìs de nomine, quamobrémque diſciplinarum ſibi peculiari ratione titulum conciliârint, tum de objecto generali quouſque ſe extendat; déque partitione (cùm juxta mentem aliorum, tum ex propria ſententia) ſatis fusè diſſerui. Proximè verò de modo quo circa ſuum objectum verſantur, hoc eſt inventione ac aſſertione proprietatum objecto ſuo congruentium per certum ac evidentem diſcurſum, qui demonſtrationis vocabulo inſigniri ſolet, occæpi

occæpi dicere. Cujus utique naturam illustrare conatus sum, ex discrimine Mathematicum inter ratiocinandi modum, & illum qui in plerisque aliis adhiberi consuevit scientiis, per utrisque non incuriosam collationem deprehenso; tum verò Mathematicorum discursuum certitudinem, & præstantiam ab adversantium ceu illationibus, & offuciis quâ ferme licuit diligentiâ studui vindicare. His utcunque pro nostra tenuitate discussis proximum esset, & mea vergit illuc animi propensio, ut ad Mathematicæ demonstrationis exponendas species devenirem; nec non ut de Mathematica inventione, nobilissima sanè materia, disquirerem, nisi quòd conducat huc, & fere necessarium videatur, ut priùs syllogismi Mathematici partes expendamus integras, hoc est ut de præmissis & conclusionibus discursûs cujusque Mathematici quales sint & quotuplices dispiciam.

Præmissas quod attinet omnis discursûs scientifici, sunt illæ vel prima principia, vel à primis principiis continuâ serie derivatæ conclusiones; quæ postquam ità deductæ sunt, ipsæ principiorum vim habent, obeúntque vices, respectu conclusionum quæ ab illis inferri, vel illarum ope, comprobari possunt. Tota verò vis cujuslibet ratiocinii apodictici tandem resolvitur in certitudinem & evidentiam primorum principiorum; his indivulsis radicibus adhærescit, his inconcussis subnititur fundamentis omnis veritas, omnis firmitas, omnis evidentia omniscunque scientiæ. Quare de illis agemus imprimis; paucis quidem generaliùs

neraliùs de principiorum natura, tum de differentiis earum (hoc est quot sunt inter se specie diversa) postremò de singulis speciebus seperatim. Quod ad principia spectat universim, rectè non uno loco notat Aristoteles, quòd sicut in motu naturali nullus ex infinito vel ad infinitum processus datur, sed ab aliquo termino incipi, in aliquem desinere oportet, siquidem infinitum nequit pertransiri (ἐ γάρ ἐστι τὸ ἄπειρον διελθεῖν): Ab infinito progressum sumente nunquam pervenietur huc, nec ab hoc ad infinitum tendens progressus unquam finietur; ità in mentis operatione discursiva, quæ motûs instar est continuò successiva, debet aliquis præstitui limes, à quo discursus ordiatur, hoc est non omnes propositiones ab aliis, indefinenti serie, comprobari, sed quædam à demonstrante sumi, concedíque debent ab audiente; alioquin interminabilis, & irrita fuerit omnis quæ fuscipitur inquisitio, confirmatio, vel declaratio veritatis. Prout ædes extrui nullæ possunt, sic nec erigi scientiæ, non subtractis quibusdam fundamentis. (Μηδὲν γὰ πιθέντες ἀναιρῆσι τὸ διαλέγεσθαι καὶ τ ὅλως λόγον: Et, Περὶ πάντων ἀδύνατον ἀποδείξιν εἶ), docet & pluries inculcat Aristoteles.) Ejusmodi verò propositiones ideò dicuntur principia, quoniam ab iis (gratis assumptis, ultróque concessis ex docentis discentísque quasi pacto quodam & consensu mutuo) initium desumit argumentatio, indè progrediens ad alias remotiores notitias. A philosopho proinde definiuntur ἄμεσοι προτάσεις, propositiones immediatæ, quia nullo

Met. XI. 6.

Met. II. 2.

nullo medio vel argumento aliunde adſcito fulciuntur, ſeu quòd immediatè, ſtatim, nullo mediante diſcurſu, impertitur illis aſſenſus. Quod non ità accipiendum eſt, quaſi principiorum exigeret ratio, ut ipſa ſimpliciter ἀναπόδεικτα ſint, omninóque nequeant demonſtrari, vel utcunque comprobari; ſic enim pauciſſima vel nulla cujuſlibet particularis ſcientiæ pronunciata, poſſent haberi vel appellari principia. Nam valdè dubito, vel eò potiùs propendeo ut exiſtimem, præter unicum illud omnis ratiocinii fundamentum, contradictoriæ propoſitiones nequeunt eſſe ſimul veræ, vel ſimul falſæ, quòd nullum aliud omnino datur ſimpliciter indemonſtrabile axioma (axioma dico; nam de definitionibus & hypotheſibus alia quodammodo res eſt, ut mox videbimus; quæ tamen ſuo modo probari vel illuſtrari poſſunt) ſaltem particularium ſcientiarum principia nedum poſſunt, at etiam debent, ſi poſcat diſcipulus, à magiſtro demonſtrari. Tenetur enim, ſua munia ſi probè exequi velit, & nomen ſuum implere, ſcientiæ præmonſtrator omnem à ſtudioſo rationabilem (ità cum barbaris loqui liceat) ſcrupulum eximere; ergò ſua quæ adſumit principia, ſi obſcura ſunt exemplis illuſtrare, ſi dubia confirmare debet (ut res feret, & ſubjecta materia patietur) ex aliis notioribus, & magis indubitatis principiis, ad ipſa uſque omnium prima principia, ſi opus ſit, idque petet ſtudioſus, diſcurſum promovendo. Ex. gr. Siquis de eo ſubdubitet Optico principio, quòd viſibilis puncti ſpecies recta defertur

aut

aut radiat in omne punctum medii circumjecti, id ex eo confirmandum est, quòd experimur objectum punctum ab oculo ubicunque sito conspici posse, nisi alicubi in rectâ à puncto visibili ad oculum lineâ corpus opacum interponatur. Et quidem pleraque Geometriæ theoremata, respectu Opticæ, Mechanicæ, Astronomiæ, & reliquorum Mathematum principia sunt, hoc est in illis ceu vera supponuntur, nec itidem omnino demonstrantur; at si de talis alicujus theorematis veritate non constet studioso, Optico (vel alterius disciplinæ magistro) incumbet id declarare, vel eò saltem digitum intendere, ubi declaratum invenietur. Imò, si in aliquo hæsitaverit axiomate Geometrico, non effugere poterit demonstrator, rem strictè æstimando, illius demonstrandi necessitatem: Nec enim ulla censeri potest accuratè perfecta, summéque scientifica demonstratio, quæ non ad primos scientiæ fontes, ad aliquod simpliciter indemonstrabile, suâ solâ vi firmum, suâ luce clarum, pervenerit. (Τότε γὰρ ὁυόμεθα γινώσκειν ἕκαστον, ὅταν τὰ αἴτια γνωρίσωμεν τὰ πρῶτα, καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς πρώτας, καὶ μέχρι τῶν στοιχείων, dictat nobis philosophus, initio φυσικῆς ἀκροάσεως.) At quomodo, percontetur aliquis, ostendetur veritas axiomatum Geometricorum? Per alia, respondebo, simpliciora pronunciata, si qua sunt, ex altiore quadam & universaliore scientia, nimirum è prima philosophia, depromenda (è prima philosophia, quæ maximè generalium ac simplicium notionum thesaurus est aut esse debet; Aristotelique

ſtotelíque proinde nominatur κυρία πάντων ἀπόδειξις: Proclo, μία ἀνυπόθετος (ἀπόδειξις) παρ' ἧς αἱ ἄλλαι ἀποδείκνυνται τὰς ἀρχάς) ſin nulla compareant talia, per definitiones terminorum, quibus ipſum conſtat; ut ſiquis ambigat de eo, an Totum parte ſua ſit majus; ſi nullum reperiatur in metaphyſicis theorema vel axioma certius, evidentius, ſimplicius iſto, per quod oſtendatur, recurrendum eſt ad definitiones totius, & partis, majoris ac minoris; è quibus rectè poſitis haud difficile fuerit illud axioma demonſtrare. Paritérque ſe res habet in reliquis. Haud abſimili ratione liquet, quòd ad principiorum naturam non abſolutè pertinet aut requiritur, ut ipſa ſint ex ſe, vel ad omnem immediatè captum evidenter vera, ſed duntaxat ut ei, qui ad ediſcendam particularem iſtam, cui dicta principia deſerviunt ſcientiam, promptus & paratus (hoc eſt animo ſtudioſus, indole habilis) accedit, manifeſtè vera videantur, & apta nata conſenſum ejus extorquere. ex. gr. Geometriæ theoremata, quæ ut modò dictum in Optica vel Aſtronomia principiorum obtinent locum, Geometriæ quidem perito clariora ſunt, & facillimum ab eo conſenſum impetrant; at difficilè capiuntur, ægréque conceduntur à Geometriæ ignaro: Nec tamen idcircò deſinunt eſſe principia, diſciplinis iſtis accommodata; at ſaltem inde conſequitur haud idoneum illarum fore diſcipulum hominem ἀγεωμέτρητον. Sapienter igitur & circumſpectè philoſophus demonſtrationem procedere docet non ex abſolutè manifeſtis, ſed ἐκ γνωριμωτέρων *Anal. Poſt. I. 9.*

Ὡς ᾧ καὶ τὸ ἁπλῶς γνώριμον, ἐστὶ πᾶσι γνώριμον ἔστιν, ἀλλὰ τὸ τοῖς εὖ διακειμένοις τὴν διάνοιαν. *Top. VI. 4.*

μοτέρων τὸ συμπέρασμα Θ, hoc est id semper habent, ut admissa post se trahant conclusionem, illamque suâ, si quam habent, luce perfundant. Non sunt igitur necessariò particularis ullius scientiæ principia simpliciter ἀμεσα, vel αὐτόπτα, vel αὐτοφανῆ, verum solummodò respectu bene comparati auditoris credibilia debent esse, satísque manifesta. Haud malè Proclus:

Lib. 2. p. 22. Οὐδεμία ὑπόθεσις τὰς ἑαυτῆς ἀρχὰς ἀποδείκνυσιν, οὐδὲ ποιεῖ λόγον περὶ αὐτῶν, ἀλλ' αὐτοπίστως ἔχει περὶ αὐτὰς, καὶ μᾶλλον εἰσὶν αὐτῇ καταφανεῖς ἢ ἐξῆς, & ipse philosophus. Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. Ἐν ἑκάστῳ γένει, in ipsa singulari quadam scientia demonstrari nequeunt, alioquin non essent principia, sed forsan extra ipsam eorum nonnulla possunt, & debent demonstrari.

Met. l. ult. Idem huc spectans: Τῷ γεωμέτρῃ μανθάνοντι ἄλλα μὲν συνδέχεται προϋποθέσθαι, ὧν δ' ἡ ὑπόθεσίς ἐστι, καὶ περὶ ὧν μέλλει μανθάνειν, οὐδὲν προμνώσκει. Denuò, τῷ γεωμέτρῃ οὐκ ἔστι λόγον δοῦναι πρὸς τὸν ἀναιροῦντα τὰς ἀρχὰς, ἀλλ' ἤτοι ἑτέρας ὑποθήσεται, ἢ πασῶν κοινῆς; hoc est, Geometra, ceu talis, principia sua non adstruit, neque cum ea respuente congreditur, at vero spectat id ad alteram aliquam, saltem ad communem omnibus scientiam; in ea decidenda lis est principiis indicta.

Phys. l. 2.

Primaria verò principiorum conditio est, docente philosopho, quòd universaliter & necessariò vera sint, hoc est ut nullam loci, temporis, aut casûs exceptionem patiantur, & subjecti naturæ repugnet prædicatum

tum ei non convenire. Aliàs illatæ concluſiones evaderent falſæ vel incertæ, nec certa ac firma ſcientia qualem pollicetur demonſtratio, ſed error aut anceps produceretur ſuſpicio. Siquidem in omni ſyllogiſmo ſcientifico, qui conſtat ex uno vel pluribus immediatè principiis, principium aſſumptum eſt major propoſitio in prima figura, quod niſi ſit univerſaliter verum, argumentatio minimè conſiſtet, ut notiſſimum in Logicis. Ut & quòd principiorum ſi qua ſit debilitas aut imperfectio (quales imprimis ſunt particularitas, & contingentia) illam in concluſiones neceſſariò derivari. Nihilominus circa hanc principiorum veritatem ex uſu ſit advertere, quòd illa non ſit unius generis, nec penitus univoca. Nam veritas abſolutè primi principii de contradictoriarum propoſitionum incompoſſibili ſimultate quoad veritatem aut falſitatem; quaſi ſpecie differre videtur à veritate reliquorum principiorum. Quod ejus enim originem ſpectat, quicquid ſit de aliis, hæc certè notio mentibus noſtris immediatè connata videtur, & indita nobis à Deo, unà cum ratiocinandi facultate, cui intrinſecè adnexa eſt; ſiquidem nulla poteſt edi ratiocinatio hoc non admiſſo principio; imò omnis ratiocinatio non aliò tendit, huc tandem redigitur, ut adigatur adverſarius ſibi contradicere, id eſt, omnium abſurdorum maximum admittere, quòd propoſitiones contradictoriæ ſimul conſiſtere poſſunt. Hoc niſi concedatur, inutilis ſit omnis ratio, inanis omnis diſquiſitio, vel diſputatio circa veri-

Ariſt. L. Poſt. c. 14.

veritatem. Non pendet hoc ab alia quapiam prævia notione, ſuppoſitione vel argumentatione, ſed ratiociniis omnibus includitur, ut fundamentum iis ſuppoſitum, ut inſtrumentum quo habiles reddimur ad ratiocinandum de aliis. Igitur hoc principium præ aliis, & καθ' ἑξοχὴν verum videtur. (Ἅπαντες ἀποδεικνύντες εἰς ταύτην ἀνάγουσιν ἐκάστων δόξαν, φύσει γὰρ ἀρχὴ τῶν ἄλλων αὕτη πάντων; inquit rectè philoſophus.)

Anal. III. 3. XI. 7.

Quanquam extremum rigorem adhibendo, quia duabus tibiis firmus incedere debet ſyllogiſmus, nec è præmiſſis unam indubitatè veram eſſe ſufficit, forſan præterea neceſſariò requiritur unum & alterum axioma cunctis ratiociniis præſternendum; hæc nempe: Quòd ſenſus ſit indubitatum κριτήριον veri ſuo modo; vel, Apparentia rei certum eſt indicium rem exiſtere. Item, rei conſimilis exiſtentia rei poſſibilitatem arguit; vel, ab omni modi rationis paritate, quoad exiſtendi poſſibilitatem, valet conſequentia. His enim tacitè ſuppoſitis innixi videtur omnis ſcientia rerum, omnis argumentatio de rebus. Siquidem aliorum principiorum indemonſtrabilium non alia veritas poſtulari videtur, præter ſatis manifeſtam poſſibilitatem conceptûs, quem animo formamus de alicujus ſymptomatis exiſtentia; hoc eſt ut concipiamus, & ſupponamus aliquid fieri quod revera fieri poſſit. E. g. Ponamus duas res idem ſpatium occupare, ſibi congruere, coextendi. Ponamus inter duo puncta lineam rectam duci. Ponamus rectam lineam uno quieſcente

cente extremo circumduci, donec in primum ſitum revertatur. Ponamus Soli & Lunæ in eadem recta tellurem interponi. Quoniam nihil in his poſitionibus, aut conceptibus continetur ἀδύνατον aut ἀσύστατον, ergò hæ hypotheſes dicentur & concedi debent eſſe veræ. Eſtque earum veritas nihil aliud quàm connexio poſſibilis ſubjecti cum prædicato, quàm mente clarè percipimus; at quam non aliter forſan quàm exemplo ſimili vel experimento poſſumus comprobare; hoc eſt, ope principiorum, quæ modò diximus omnium primo de contradictoriis principio ſubjungenda videri. (id enim, id fortè ſolum, apprehendimus ut poſſibile, cui idem ſpecie, vel cui admodum ſimile quomodocunque experti ſumus extitiſſe). Similiter hypotheſis cujuſpiam falſitas nil videtur aliud, quàm conceptus & poſitio rei ceu effectæ vel exiſtentis, quæ nequit effici, vel exiſtere. Ut ſi quis ponat figuram rectilineam triangulam quadrangulam; aut corpus indiviſibile; aut hominem ſenſûs ac rationis expertem; ſi quis quadratum fieri petat, aut ſupponat exiſtere, diametrum obtinens lateri commenſurabilem; vel triangulum cujus duo latera exæquentur tertio; vel circulum, cujus peripheria ſit diametri quadrupla; cùm repugnet ejuſmodi res exiſtere; ſaltem cùm nihil his ſimile fuerit animo unquam noſtro obverſatum, vel repræſentatum ab experientia, repudiandæ ſunt ejuſmodi propoſitiones, nec in principiorum cenſum admittendæ.

E quibus obſervatis obiter conſectari videtur,

detur, quòd omnis demonſtratio, quò ſit efficaciter talis, quodammodo ſupponat exiſtentiam Dei; non tantum ex parte facultatis cognoſcentis, ſed etiam ex parte objecti ſcibilis. Optimè quidem notavit Carteſius, quò abſolutè certi ſimus veritatem nos attingere, requiri ut innoteſcat facultates noſtras veri apprehenſivas ac dijudicativas fore ſinceras; id quod non aliunde quàm ex conditoris noſtri potentiâ, bonitate, ſinceritate conſtare poſſe videtur. At verò quoniam principiorum indemonſtrabilium quoque veritas, ex parte objecti pendet à poſſibili rerum ſuppoſitarum exiſtentia, vel effectione; omnis autem poſſibilitas intrinſecè connotat reſpectum ad cauſam vel potentiam, quæ poteſt efficere, ut exiſtant quæ poſſibilia dicuntur, aut concipiuntur. Ergo demonſtratio ſupponit potentiam effectricem omnium, quæ ſub poſſibilium ratione concipimus & ſupponimus; hoc eſt, potentiam divinam immenſam & incomprehenſibilem, utpote quæ poteſt effecta dare, quæcunque nos concipere valemus ut poſſibilia; & ex paritate rationis alia præterea innumera à nobis non comprehenſa. Supponit, inquam, omnis demonſtratio veras hypotheſes; veritas hypotheſis innuit rei, quæ ponitur, exiſtentiam poſſibilem; hæc poſſibilitas connotat effectricem rei cauſam; (aliàs impoſſibile foret eam exiſtere) effectrix omnium cauſa Deus eſt. Omnis igitur demonſtratio ſupponit exiſtentiam Dei. Sed hanc ἐν παρόδῳ ſuſceptam argumentationem ultrà perſequi non libet.

E dictis etiam ſequitur confici poſſe demonſtrationes

monſtrationes de rebus, quæ nunquam extiterunt, aut exiſtent uſpiam; quia nempe ſufficit ad demonſtrationem, ut hypotheſes aſſumantur veræ, hoc eſt quæ nullam implicant ἀσυναρτησίαν. Ex. gr. Exiſtimat Galilæus ſe novam de motu ſcientiam condidiſſe, ſupponendo gravia naturaliter verſus centrum terræ deferri motu uniformiter accelerato (hoc eſt, ità ut is à quiete recedens æqualibus continuò temporibus æqualia ſibi celeritatis momenta ſuperaddat) quod ſi falſum ſit (utì non uſquequaque verum arbitror pluribus de cauſis) iſtiuſmodi dari motum in hac rerum natura, quia tamen, volente Deo, talis motus exiſtere poteſt, utpote qui nil continet à poſſibilitate diſſentaneum, ideò quæ ab ejus ſuppoſitione per illationem legitimam reſultant concluſiones pro verè demonſtratis haberi debent. Item, etſi quod ſupponunt Mechanici, puncta quævis corporum gravium premere, conari, vel ad motum propendere per rectas lineas ſibi parallelas, horizonti perpendiculares, & proinde æqualia pondera ad æquales diſtantias æquiponderare, ſit revera naturæ diſconveniens, eóque reſpectu falſum; tamen quia clarè concipi poteſt univerſum ſic ordinari, ut corpora tales habeant propenſiones, ideò concluſio tali hypotheſi ſuperſtructa demonſtrati theorematis dignitatem ac titulum tueri poteſt. Non ſecùs, etſi quæ Ptolemæus, Copernicus, aliſque paſſim Aſtronomi ſubſternunt; aſtrorum motum in circulis peragi vel ellipſibus perfectis; & eſſe illos quomodocunque regulares vel æquabiles;

item illos eaſdem perpetuâ conſtantiâ temporum periodos, itinerum orbitas conſervare; aliáque talia, ſint hujus naturæ (variabilis & in minoribus incertæ), horum ſyderum reſpectu, opinor, falſa, vel ſaltem incomperta; quia tamen nil impedit quò minus divinum numen ejuſmodi mundum creare poſſit, in quo factis ſyderibus tales motus exquiſite conveniant, ideò veriſſimæ ſunt iſtis hypotheſibus innixæ demonſtrationes; & eorum Aſtronomia vera eſt, non quidem hujus, ſed alterius à Deo creabilis mundi: Nobis enim Deus poteſtatem indidit cogitatione noſtrâ innumeros quaſi creandi mundos imaginarios, quos ipſe ſi velit reales poteſt efficere. Denique licèt nulli tales in rerum natura motus unquam reperti fuerint, qualibus lineas helices, quadratices, conchoides, ciſſoides, & conſimiles alias ſupponunt deſcriptas Geometræ; nihilo tamen minùs, cùm facilè concipiamus nihil obſtare quin tales dentur æquè ac alii multi non abſimiles, quos indies experimur, ideò quæ ex illis ſuppoſitis conſequuntur ſymptomata rectè demonſtrantur. Siquidem ration s imperium naturæ cancellos longè tranſgreditur: Mundus intelligibilis immane quantum exporrectior & diffuſior eſt mundo ſenſibili; multo plura mentis acies, quàm corporis ſenſus contemplatur.

Hujuſmodi quæque ſcientia particularis hypotheſes ſibi producit, quæ non indigent aliâ probatione, quàm ut explicetur, & exemplo aliquo vel experimento notorio, diſcentis ad captum accommodato, commonſtretur

monſtretur & quoad fieri poteſt evidens reddatur earum poſſibilitas; cui ſi præfractè nolit acquieſcere, nil ſupereſt, quàm ut abrumpatur doctrinæ commercium, & faceſſere jubeatur moroſus iſte, ceu propoſitæ ſcientiæ parùm οἰκεῖος & ἀκροατής. E. g. Si quis abnuat conſentire, quòd figura quædam plana (quæ circulus dicatur) rectæ lineæ circumductu procreari poſſit, neque convinci velit, (obvio circini uſu, vel rotæ circa centrum revolutione, vel experimento conſimili) tale quid confici, concipíque poſſe, monendus eſt ut aliò conferat ſe, nec ut quicquam cum Geometris commiſceat negotii.

Porrò, conſtare quoque poterit ex his quid ſit, & qualem obtineat veritatem id genus principii, quod definitionis nomine venire ſolet. Nempè quòd ſit propoſitio nomen indicans alicujus rei, quæ reſultat ex aliquâ ſuppoſitione poſſibili. Ut exempli gratiâ (nam dicta ſtuleo quàm facillimis & precipuè familiaribus exemplis illuſtrare) ſi ponam tres in aliquo plano rectas lineas ità concurrere, ut ſpatium aliquod includant, ſeu figuram quandam conſtituant, incluſum ſpatium, ſeu figuram conſtitutam appello triangulum; ſítque trianguli talis definitio, Triangulum eſt figura plana comprehenſa tribus rectis lineis concurrentibus: Si ponam, ſemicirculum circa ſuam baſim, vel diametrum quieſcentem revolvi donec in illum, quem ab initio habuit ſitum reſtituatur, eóque rotatu productum corpus appellem ſphæram; erit indè ſphæræ definitio, corpus genitum ex ſemicirculi

circa diametrum unâ completâ revolutione. Si denique ſtatuam inter ſolem & lunam collocari terram, ex quo poſitu lux Solis intercipiatur, & reſultet obſcuratio Lunæ, quam eclipſim voco; hinc emergit Eclipſis definitio, Obſcuratio (vel privato lucis) in Luna, ob telluris interjectum. In quibus perſpicere licet definitionis veritatem, quoad ejus ſubjectum, eſſe merè arbitrarium; illud enim eſt nomen merum contingenter & ex arbitrio impoſitum (ſcilicet à ſcientiæ præceptore pro ſuo jure confictum; vel ab uſu vulgari deſumptum; vel doctorum conſenſu adprobatum, vel utcunque nullatenus κατὰ φύσιν, ex ſuâ ipſius natura, ſed omnino κατὰ θέσιν, ex hominum inſtituto ſignificans rem definitam) quare non aliter demonſtrari poteſt illud nomen convenire prædicato, quàm ad Lexicorum auctoritatem, ad popularem conſuetudinem, ad doctorum ſuffragia provocando; vel certè, doctori cuivis in hoc competens, jus ſibimet adrogando. At verò quoad prædicatum liquet ejus (definitionis inquam cujuſpiam) veritatem ex dictæ hypotheſeos, (quam includit) poſſibilitate dependere; ſic, ut vera ſit definitio, quæ nomen adſignat rei poſſibilem aliquam ſuppoſitionem, in ipſa expreſſam, conſequenti (vel ab ea reſultanti). Unde porro liquet definitiones ex ſua natura non aliter eſſe demonſtrabiles, quàm hypotheſes ipſas, è quibus velut emergunt; hoc eſt quàm oſtendendo nomen adaptari rei naturæ conditionem habenti ſatis manifeſtè poſſibilem, juxta quod ſuperiùs inculcatum eſt. Nam certè rei incom-

Conf. Ariſt. Met XI. 7.

poſſibilis,

possibilis, vel repugnantiam implicantis, non est ulla propriè definitio, sicuti nec affectio. (Aristoteles; τὸ μὴ ὂν ἀδύνατον οἶδεν ὅτι ἐστὶν, ἀλλά τι μὲν σημαίνει ὁ λόγος, ἢ τὸ ὄνομα, ὅταν εἴπω τραγέλαφος· τί δ' ἐστὶ τραγέλαφος, ἀδύνατον εἰδέναι. Quid significet vocabulum hircocervus utcunque potest intelligi, sed nequit definiri, quia nec ejusmodi res existere possunt. Quod verò spectat ad reliquorum axiomatum veritatem, derivatur illa, sicut antehac insinuatum, ex definitionum antecedanearum veritate præsuppositâ, per legitimum ratiocinium. Ut v. g. quæ prostant in elementis axiomata: Omnes anguli recti sunt æquales inter se: Rectæ lineæ spatium non comprehendunt: Omnes è centro ad peripheriam circuli ductæ rectæ lineæ æquantur; ex anguli recti, æqualitatis, spatii comprehensi, circuli definitionibus ritè constitutis inferantur facilè; saltem inferri debent, ut axiomatum dignitatem jure tueantur. Imò quæ clarissima videntur ex se, nulliúsque non audientis suffragium promptissimè consequuntur, non dubito quin eodem modo, per celerrimum è definitionibus discursum colligantur. Quoniam verò suppositiones, è quibus istæ definitiones modo supradicto resultant, sunt omnium evidentissimè possibiles (utpote quotidianis innumeris obviis experimentis consentaneæ) suáque naturâ simplicissimæ, sic ut neminis aut observationem effugiant, aut captum exsuperent; quin & præterea axiomata ista non post longas ambages, at immediatè ex iis consectantur; indè fit ut ille quo comprobantur

tur discursus evadat imperceptibilis, & quasi nullus; sicut usu venit, ut quæ facillimè fiunt, quomodo fiant non sentiatur. Quali pacto fit, ut apprimè dexter & peritus Musicæ vix ipse sibi videatur tam ex arte quapiam, quàm ex instinctu instrumentum pulsare; vix ut suæ rationis ipse motum, vix memoriæ exercitium persentiscat. Simili modo, v. g. quoniam quotidiè videmus magnitudines varias, quoad dimensiones omnimodas sibimet applicatas mutuò quadantenus congruere, vel idem spatium replere, vel inter eosdem terminos protendi, ideò facilè concedimus tale quid supponi; itémque cùm usu receptissimum sit, ut quæ ex illa suppositione resultat habitudo seu relatio magnitudinum ad se invicem dicatur æqualitas, indè nullo fere negotio deducimus, ac affirmanti consentimus, quòd quæcunque eidem magnitudini æquantur magnitudines, etiam sibi mutuò æquentur; propter dictæ nimirum hypothesis possibilitatem, & definitionis convenientiam continuò deprehensas. Itaque axiomata vel maximè perspicua vix aliter differunt ab aliis theorematis, quàm eo quòd ad primas & simplicissimas hypotheses ac definitiones accedunt propiùs, adeóque quòd brevius & faciliùs demonstrantur.

E dictis innotescere queat omnis scientiæ naturalis origo, & genuina methodus à primis usque cognitionis fontibus ratiocinandi, quæ fermè talis est. Mens ex observatione rerum objectarum occasionem arripit similes ideas compingendi, quas cùm clarè percipiat convenire rebus quæ possunt existere,

illas affirmat & ſupponit, tum affingens & approprians eis vocabula, definitiones efformat; ex his quomodocunque verſatis, & comparatis inter ſe conſequentias elicit, & theoremata condit, è quibus in certa ſyſtemata coagmentatis conflantur particulares ſcientiæ.

Unde præterea conſequi videtur, quòd non opus ſit, ſaltem pro ſcientiis theoreticis (nam de practicis, morales præſertim intelligo, alia res eſt: Etenim harum principia non tam diſcurſu colligi, quàm ex appetitu vel inſtinctu naturali promanare videntur. E g talia principia ſcientiæ moralis: Quicquid naturæ conveniens, innocuè gratum, utile, amabile eſt, amplectendum & perſequendum: Omne naturæ noxium, injucundum, incommodum (quod damnum, dolorem, perniciem affert) abominandum eſt & defugiendum; talia, inquam, axiomata non videntur ab aliquo ratiocinio dependere vel derivari, ſed eo modo cognoſci, quo à brutis etiam animantibus diſcernitur amaros ſapores, odores fætidos, diſſonos ſtrepitus, horrida ſpectacula, reliqua ſenſibus ingrata fore devitanda, iiſque contraria amplectenda eſſe; de talibus igitur ſcientiis nil affirmamus; at de merè ſpeculativis ſcientiis obtendimus è dictis conſectari quòd non opus ſit) phyſicas aliquas προλήψεις, communes ἐννοίας, congenitas ſpecies ſupponere, cùm ipſa mens abſque illis ſufficienter inſtructa ſit, & nativâ polleat facultate neceſſaria ſibimet ad ſcientiam principia ac media conquirendi, modo jam expoſito. Non obſtinatè pernego

tales

tales notiones dari; sed eò proclivis sim ut existimem illas haud necessariò supponi; nedum ut hac de causa omnino oporteat Platonicas ullas ἀναμνήσεις, & nescio quas animæ dormitantis ἀνεγέρσεις confingere, vel comminisci.

Quinetiam non minùs hinc liquere videtur, quòd principiorum veritas non (ut censuisse videtur Aristoteles) inductione solâ (vel singularium observatione perpetuâ seu crebrâ) nitatur; cùm ad veram stabiliendam hypothesin, ad veram definitionem formandam, ad vera proinde principia constituenda vel unicum suffecerit experimentum, modò satis clarum & indubitatum. Aliquo fateor modo requiritur ad stabiliendum hypothesium veritatem sensûs sinceritas, ast universalitas observationis, aut frequentia non ità. *Post. II.* 19.

Multa possem huc adjicere, sed hæc de principiorum natura generatim dicta sufficiant. Et sanè longius hæc extraxi quàm aut ipse cogitaveram, aut forte quàm oportuit, hoc est quàm arriserit vobis, meditatione me sensim provehente: Nec tamen prorsus inutiliter, ut spero, quum demonstrativas ambientibus scientias cum primis expediat ipsius demonstrationis naturam intimè pernoviſſe. Quare mihi condonetis obtestor hanc ἀδολεσχίαν, & non aliunde quàm ex attenta rei consideratione profecta vel hausta quæ dixi boni consulatis, & examinetis libere, cautéque.

Confero me jam ad principiorum species distinguendas, hoc est ut quot sint inter se quasi specie diversa principia disquiram:

quiram: Quæ controverſia licèt è dictis facilè dirimi poſſit, operæ tamen pretium eſſe puto quid aliis viſum referre; vos ut penſitatis omnium ſententiis quid rationi ſit magis conſentaneum rectiùs dijudicetis. Aſt patientiam veſtram inſultu primo nolim aggredi ferociùs, aut acriùs irritare, quapropter hanc diſquiſitionem & alia forſan quædam de principiis obſervatu non indigna rejiciam in ſequentem lectionem.

LECT. VIII.

DE principiorum naturâ, conditione, origine, veritate generalia nuperrimè quædam attigimus. Succedit ut de ipſorum numero, ſeu quot ipſorum diſtinctæ ſint ſpecies, quid auctores tradant, quid ratio dictet & perſuadeat eventilemus. Ariſtoteles cùm in hac materia ſubobſcurus, varius & fere ſibi diſcors videatur, ejus ut mentem vix penitus aſſequi liceat, eam tamen collatis locis expiſcari nitemur, & proditam examinare. Capite ſecundo primi Poſt. Anal. tres conſtituit ἀρχὰς συλλογιστικὰς. Axiomata, hypotheſes, definitiones. Nam ipſas imprimis διχοτομεῖ in axiomata, & theſes; tum theſes in hypotheſes & definitiones ſubdiſtinguit. Axiomatis naturam ſic explicat, ut ſit ἀρχὴ συλλογιστικὴ ὧν μή ἐστι δεῖξαι, καὶ ἀναγκαῖον ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μανθάνοντα (tale principium ſyllogiſticum quod non poſſit (aut quod non debeat)

debeat) demonſtrari, quódque neceſſariò debet habere (hoc eſt intelligere, admittere, agnoſcere) qui alicui diſciplinæ daturus eſt operam. Hypotheſin autem & definitionem, quatenus ſub generaliori theſis nomine continentur, definit conjunctim, ἀρχὴ συλλογιστικὴ, ἧς μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μανθάνοντα; hoc eſt, tale demonſtrationis principium quod itidem non poſſit (aut non debeat) oſtendi, quódque non eſt neceſſarium ut futurus diſcipulus in anteceſſum ſciat aut comprehendat. Quatenus autem hæ diſtinguuntur à ſe invicem, hypotheſin finit eſſe theſin, quæ ſumit aliquid eſſe vel non eſſe (ut eſſe magnitudinem, dari unitatem). Definitionem verò pronunciat eſſe theſin, quæ ſumitur quid ſit aliquid. Ut quòd unitas ſit ποσὸν ἀδιαίρετον (quantum vel quotum indiviſum). Capite verò decimo ejuſdem tractatûs, principiorum alia tria genera ſtatuere videtur, axiomata communia, hypotheſes, & poſtulata. Et hypotheſes quidem à poſtulatis ità ſecernit. Ὅσα μέν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας ταῦτα, ἐὰν μὲν δεκτὰ λαμβάνει τῷ μανθάνοντι, ὑποθέσεις, ἐὰν δὲ μή, οὐκ ἔστιν οὐκ ἁπλῶς ὑποθέσις, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον ἐὰν ᾖ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης, ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ, τὸ αὐτὸ αἰτεῖ. καὶ τοῦτο διαφέρει ὑποθέσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τῷ μανθάνοντι καὶ τῇ δόξῃ· ἢ ὃ ἂν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῇ μὴ δείξας. Hoc eſt, quæcunque cùm probari poſſint, ſumit demonſtrator abſque probatione, ſi hæc diſcentis opinioni conſentanea ſunt, ſupponit, nec

nec est simpliciter hypothesis, sed ejus solius respectu; quòd si nulla insit, vel etiam contraria insit opinio, tali casu assumpta postulat. Ac hoc differunt hypothesis & postulatum. Est enim postulatum id quod discentis notioni subcontrariatur; vel quod quis cùm demonstrabile sit, accipit ac adhibet minimè demonstrans. Ità quidem ex horum collatione, omnino principiorum quinque videantur esse genera, ex philosophi sententia: Axiomata, suppositiones indemonstrabiles, definitiones, suppositiones demonstrabiles, & postulata. Sed in speciem adversantur priori loco dicta illis, quæ tradit in posteriori. Illic enim principia statuere videtur absolutè μὴ δεικτὰ, nam thesin definit, ᾧ μὴ ἔστι δεῖξαι; hic autem hypotheses adsumptas, & postulata disertè pronunciat ἀποδεικτὰ. Quibus conciliandis dici possit philosophum priore loco principia simpliciter omnis scientiæ prima respicere, quæ certè demonstrari nefas est (alioquin prima non forent) posteriore verò ad peculiaria subjectarum scientiarum principia digitum intendere, quæ nil obstat quin possint demonstrari (sicut à nobis in præcedentibus ostensum est) vel certè vult principia quævis, in illa ubi ceu talia adhibentur scientia probationem non desiderare, nec admittere, quamvis in alia demonstrari possint, ac debeant.

Verùm in hac Aristotelica recensione principiorum, & eorum explicatione (quod honore salvo dictum velim divini viri, quem siquis alius, ob profundissimam sapientiam, & diffusissimam eruditionem summopere vene-

veneror ac ſuſpicio, omnibuſque commendatum velim) nonnulla minùs arrident. Prima quidem περιχοτομία (in hypotheſes, definitiones, axiomata) quod ipſa diviſionis attinet membra, generalim & cujuſvis ſcientiæ reſpectu, mihi videtur omnium rectiſſimè conſtituta; quoad explicationem ſecùs videtur. Nam per hypotheſin exemplis ſuis indicat ſe nil aliud intelligere, quàm ſubjecti (de quo agitur in aliqua ſcientia vel demonſtratione) poſitionem ſeu aſſertionem quòd ſit. Veluti quòd detur unitas, quòd exiſtat magnitudo (δεῖ, inquit alicubi, δεῖ δὴ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ τὸ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι). Atqui talis hypotheſis prorſus inepta videtur ad ſcientiam, cùm ex ea nil poſſit inferri, nec ea ſoleat ullum ingredi ſyllogiſmum. Ex eo nempe quòd ſit, quòd detur, quòd exiſtat aut exiſtere poſſit magnitudo, quid ex ſe conſequi poteſt, quæ poteſt indè quæſo derivari concluſio? Planè nulla, reor. At ex eò quòd talis ſit, quod tali prædita ſymptomate, quòd talem ſitum, talem motum obtineat conſequi poteſt (aliis eò adſcitis & collatis) alia ei obtingere ſymptomata cum iſtis connexa. Itaque prædicta ſuppoſitio non rite ſtatuitur demonſtrationis principium. Eſt enim de ratione talis principii, ut aptum natum ſit aliquam ex ſe quaſi concluſionem progignere, alterius propoſitiones utcunque probatioris deſervire ac conducere. Ex nudâ verò poſitione ſubjecti quòd ſit nil aliud ſequatur quàm ipſum eſſe, ſcilicet ità nugando, eſt, ergo eſt. Equidem, fateor, antecedenter ad

I. Poſt. 10.

omnium

omnium ſcientiam quodammodo præcognoſcitur & præſupponitur ſubjecti cognitio, vel conceptio quædam, quatenus omnis propoſitio conflatur ex terminis incomplexis, qui non aliter apprehendi poſſint quàm ut rerum ſignificativi qualemcunque habentium eſſentiam, hoc eſt quàm concipiendo vel ſupponendo quòd ſint; ſed non ideò termini incomplexi τὸ ἐξ οὗ implicantes ſunt principia demonſtrationum, ſed materia potiùs vel partes ipſorum integrales.

Etiam illud vehementer improbo, quòd affirmet Ariſtoteles definitionem nihil affirmare, vel accipere neutram partem contradictionis; hoc eſt, quòd ſumat definitionem non pro integra enunciatione, ſed tantùm pro ejus prædicato; ut v. g. quòd animal rationale ſit definitio hominis, eâque ratione principium demonſtrationis; non autem hæc enunciatio; homo eſt animal rationale. At enim, quomodò non adverſatur hoc ab ipſo præſtitutæ definitioni principii, quòd nempe ſit πρότασις ἄμεσος; quomodò non repugnat principii naturæ ac qualitati, quæ requirit ut ſit verum, taliter verum ut ex eo poſſint alia vera deduci? (Cùm nempe veritas ſit qualitas enunciationis perfectæ, non ſimplicis termini, nec ex hujus apprehenſione quicquam eliciatur.) Quare definitio nominatur ab ipſo theſis quædam, ſi nil ponit aut aſſerit? Quo denique pacto fiet, ut non perperam & perabſurdè hoc modo ſumpta definitio cum axiomatis (quæ ſunt enunciationes perfectæ) cum hypotheſibus, quæ ipſo docente aliquid aſſerunt, in ratione prin-

principii comparentur, conjungantur, conveniant? Reverà definitio, quæ demonſtrationis habetur principium, eſt enunciatio completa, de ſubjecto propoſito prædicans aliquam ipſius affectionem, utilem aliis educendis paſſionibus. Eſt, inquam, ſyllogiſmi apodictici propoſitio quædam præcipua, cauſam quatenus fieri poteſt, oſtendens ſymptomatis demonſtrati. Definitio quidem incomplexa (vel prædicatum definitionis complexæ) poterit eſſe, ſæpiſſimè eſt, medium vel argumentum extruendæ demonſtrationi repertum, delectúmque; ſed non ideò principium eſt, non magis quàm totum & pars ſunt ideò demonſtrationis principia, quia pronunciatum illud, Totum eſt parte majus, principiis accenſetur. Taceo quòd non uſquequaque verum ſit, axiomata non poſſe demonſtrari (ἃ μὴ ἔστι δεῖξαι) quia philoſophi verba, ſicut antehac inſinuatum, aliquam admittunt excuſationem & propoſitionem commodam. De aliis verò duobus, quæ ſubjungit, principiorum generibus, quæ demonſtrator aſſumit, alioquin demonſtrabilia, hypotheſibus nimirum & poſtulatis, illa ſentio nequicquam ab axiomatis differre. Quicquid enim demonſtrari poteſt, eſt theorema; theorema verò quod in aliqua particulari ſcientia non probatur, at ex aliquâ ſuperiore deſumitur, axiomatis obtinet locum in iſta. Cæterùm diſtinctionis, quam apponit Ariſtoteles hypotheſin inter & poſtulatum (quòd illi ſc. haud illibenter adſtipuletur auditor, huic verò diſſentiat) perquam exile video fundamentum. Nam

utcunque

utcunque ſit de præconceptis auditoris opinionibus, quæ nihil admodum refert quales fuerint, docentis menti conſonæ vel diſcrepantes) priuſquam ad demonſtrationem efficacem deſcendatur, neceſſarium eſt ut adhibitis quibuſque principiis aſſenſum præſtet, alioquin nullam ſibi perſentiſcet ingenitam ſcientiam. Contingere poteſt, at quid hoc ad ſcientiæ propoſitum? Ut diſcipulus habuerit præjudicia: Illa certè, ſiqua habuit, exuere debet ac deponere magiſtri ratiociniis convictus, aut luculentis rei propoſitæ exemplis illuſtratus, antequam perfectam, abſolutam & propriè dictam ſcientiam queat indipiſci. Qualis enim, obteſtor, futura eſt demonſtrationis energia, quis effectus, ſi diſcipulus non annuat, non acquieſcat, non mordicus adhæreſcat præmiſſis? Nè dicam quomodò rectè dici poſſit ἀπόμα, quod poteſt demonſtrari. Cur enim accipiat precariò, quod jure poteſt aſſumere, quod vi valet extorquere? Vel cur non ignavis præceptoris precibus repugnet ὁ μανθάνων; quare non perſpicio quid philoſophum ad hanc adduxerit diſtinctionem; nec ſcrupulum eximunt interpretes. Proclum quod attinet (nam in eum jam aciem diſtringo) dum is Ariſtotelem ſequi profitetur, pejora meo judicio reddit omnia. Nam primò tribuit Euclidi tria genera principiorum, axiomata, hypotheſes, poſtulata, quorum differentias exponit ex Ariſtotelis ſententia: Quaſi verò definitiones non ſint principia, vel eas non agnoverit Euclides, vel Ariſtoteles eas nunquam accenſuerit principiis, diſſertiſſimèque

ſecreverit & contradiſtinxerit ab hypotheſibus. Itaque mira Procli videtur ἀβλεψία definitiones, in principiorum enumeratione, vel omittentis omnino, vel cum Ariſtotelicis hypotheſibus confundentis; tum quæ ſuis demonſtrabilibus hypotheſibus ac poſtulatis aſcribit Ariſtoteles, ea Proclus attribuit definitionibus, & poſtulatis Euclideis, admodum incongruè. Nam quomodo Euclideæ definitiones, quomodo poſtulata Geometrica ſunt ἄτοπα? Quomodò requiritur, ut poſtulatis Euclideis diſcipuli ſententia reſtagetur, aut eis verè adaptari poſſit illud, μὴ συγχωρῶντος τὰ μανθάνοντος, ὅμως λαμβάνει; quaſi velit nolit ἀκροατὴς, quantumvis reclamet atque repugnet, ea tamen Geometra confidenter arripiat. Quid hoc eſt aliud quam Geometriæ fundamenta convellere, quàm omnis diſciplinæ commercium diſturbare? Imò potiùs Euclidea poſtulata tam perſpicuam præ ſe poſſibilitatem ferunt, tam familiaribus & crebris exemplis poſſunt illuſtrari, non poſſit ut illis ſcientiæ capax ingenium ullatenus obſiſtere vel obmurmurare; immodeſtus alioquin, importunus, ineptus foret ſcientiæ doctor, qui poſtularet aut ſupponeret, fruſtráque pergeret in docendo, vel demonſtrando non admiſſis ſuis poſtulatis. Sed quid Proclum oppugno, cùm ipſe ſe jugulat, & quas libro ſecundo ab Ariſtotele propinatas crudas notiones ingeſſerat, eas tertii initio removere videatur? Nam δεῖ δὲ παντα χῆ τὰς ἀρχὰς ἢ μὴ τὰς ἀρχὰς διαφέρειν τῇ ἀπλάτῳ, τῷ ἀναπο δείκτῳ, τῷ αὐτοπίστῳ, inquit, aliæ pleraque

ſub-

subnectens in eandem mentem clarè repugnantia priùs adstructis, & Aristotelicæ, cui suffragari videtur, postulatorum descriptioni. Sed ut Proclum dimittamus, quid ad hæc Ramus? Arguit Procli distinctionem; at quomodo? Sic ut omne sublatum eat principiorum discrimen, insigni profectò morositate. Quibus autem fretus argumentis? *Quoniam*, ait, *definitiones, divisiones, & propositiones quævis aliæ per se manifestæ admittuntur in disciplinis, non postulati vel axiomatis, sed ipso tantùm suæ claritatis & perspicuitatis nomine.* Quot verba, tot fere subsunt paralogismi. Quis definitiones in aliqua disciplina credidit admittendas postulati vel axiomatis nomine? Quis accuratè tractans aliquam scientiam non definitiones separavit ab axiomatis? At etsi nemo distinxisset, non ideò possent distingui? Quò ipsius igitur tot novellæ distinctiunculæ? Verùm admittuntur solo claritatis suæ nomine, hoc est, opinor, non quatenus definitiones aut axiomata, sed quia clara. Esto. Quid inde? Ergò non debent distingui: Bella consequentia, persimilis huic, Sol & lampas conspiciuntur, non solis & lampadis nomine, sed quia clarè lucent; ergò, Sol & lampas distingui non debent; vel ergò non est alia lux solis, alia lampadis. At porrò disputat, ab Euclide adhibetur id discrimen tantùm in primo libro, in cæteris postea libris contempta est ista principiorum differentia: Contempta est, unde constat? Certè definitiones alias, alia axiomata subjicit alibi locis opportunis, plura postulata non addit,

Sch. Math. lib. 3.

quia nullis aliis opus videbatur: Sed ubi confundit istas species principiorum, ubi præ se fert ullas contemnere? Nisi postulata non ἀκαίρως nominare fit illa contemnere. Sed fortiùs instat Archimedis gravissimam authoritatem objectando; qui isorrhophicis suis præstrata principia promiscuè vocat αἰτήματα. Αἰτούμεθα, dicit, τὰ ἰσοβαρεά ὀπὸ τῶν ἴσων μακρίον ἰσορρόπειν (nec absimiliter Euclides in Opticis quælibet adsumpta principia nuncupat hypotheses). De Archimede subnotârat idem jam olim Geminus apud Proclum & Eutocium; cui instantiæ respondeo, forsan Archimedem, brevitati studentem, & nè nimium exiguo libello apparatum præstrueret, extremam ἀκρίβειαν consultò neglexisse; quam tamen in libris de sphæra & cylindro, de spiralibus, & aliis curiosiùs pertextis observavit, definitiones ab axiomatis sejungens. Nec adeò mirum est eadem vocabula nunc angustiùs stringi, nunc extendi latiùs prò scriptoris ingenio, vel proposito. Sicut Stoici, insignes illi rerum pariter ac vocabulorum quasi libellatores, enunciationes universas axiomatum titulo donârunt; quasi prout virtutes & vitia, sic & propositiones omnes sibi dignitate vellent exæquare. Nec diffiteor alioquin petitionis vocabulum, ex significatu vulgari, satis accommodatè tribui principiis omnimodis. Nam quoniam utcunque debet impetrari discentis consensus, docens quodammodò petit. Verecundius id certè quàm si dicatur præcipere, veluti subinde disciplinarum magistri dictata sua vocitant præcepta. Non malè Rivaltus ad istum locum Archimedis,

Petere possumus hoc vel illud sic appellari, tum hoc vel illud quod naturæ lumine cognoscimus ratum statui, denique hoc vel illud possibile fieri. At omne quod fieri vel sic nominari potest dignitatem appellare nequimus, nec innatam mentibus nostris cognitionem definitionem esse concedetur. Satis hoc ad rem apposite. Addo Proclum: Ἤδη οἱ μὲν πάντα αἰτήματα καλεῖν ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ προβλήματα τὰ ζητούμενα πάντα. Potuit igitur Archimedes, brevitati dans operam, ideóque principia sua simul uno corpore complecti volens petitionum illis nomen assignare non incommodè; non æquè potuisset eis omnibus definitionum aut axiomatum titulum adaptare. Simili jure potuit Euclides, possent alii suis principiis indere nomen hypothesium. Nam & vocabulum supponere latissimæ capax est acceptionis. Nec improprie quicquid ad demonstrationem utile præmittitur dici potest ὑποκεῖσθαι, vel ὑποτίθεσθαι, subjacere, supponi, substerni instar fundamenti, cui superextruantur sequuturæ demonstrationes. Archimedi solenne est ità loqui. Ante libros de sphæra & cylindro, post definitiones & axiomata, τούτων, inquit, ὑποκειμένων. Ante definitiones præmissas libro de conoidibus, & sphæroidibus. Ὑπέκειτο τάδε. In libro de spiralibus, πρόκειν τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν (ubi προκεῖσθαι æquipollet τῷ ὑποκεῖσθαι). Itaque supponere designat universim præmittere vel præsternere, fundamenti loco; quâ ratione cunctis congruit principiis. Sicut & λαμβάνειν, assumere, vel pro concesso accipere; licet hoc axiomatis peculiariùs

accommodetur: Ut in iis de sphæra & cylindro, post traditas definitiones axiomata subjecturus Archimedes, λαμβάνω δὲ ταῦτα. Non reticebo, in transcursu, paullo suprà memoratum Archimedis Scholiasten, Rivaltum, novum nobis ex eo principii genus, aut novum certè nomen extudisse, quod appellat subsidium. Dixerat Archimedes post definitiones, alia demonstrationibus suis præmissa, προγράψαντες ἐν τάτε θεωρήματα, καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γράψουμεν σοὶ τὰ προβλήματα. Hinc Rivaltus ἐπιτάγματα subsidia interpretans, subsidii nomen imponit definitionibus quibusdam, quæ ut opinor loco suo exciderant. Sed Archimedes per ἐπιτάγματα nil aliud intelligere videtur, quam propositiones quasdam lemmaticas in libri sequentis decursu exhibitas, ad primariorum theorematum demonstrationem requisitas; et igitur τὰ ἐπιτάγματα sunt quæ ordine sequuntur vel inseruntur propositiones, ad illarum instar cohortium, quas historiæ Romanæ scriptores ἐπιτάγματα, cohortes subsidiarias, solent appellare. Quanquam fere suspicor Archimedem ejusmodi vocabulo non usum, sed exscriptorum forsan incuria irrepsisse ἐπιτάγματα, pro ἐπὶ ταῦτα· τὰ ἐπὶ ταῦτα χρείαν ἔχοντα εἰς ἀποδείξεις, quæ præterea subjiciuntur ad demonstrationem utilia. Quanquam non dissiteor epitagmatis nomen, hujusmodi rebus appositum, etiam alicubi apud Pappum extare; sic tamen ut quomodo sit accipiendum vix ex contextu liceat divinare. Sed hæc ἐν παρόδῳ. Et sanè

In libr. de Conoid. & Sphæroid.

Lib. 7. p. 244.

sanè vereor ut vos minùs delectent hæ velitatoriæ σκιαμαχίαι, hæ tricæ, hæ cuminisectiones, me certè tædet ipsarum, nec sine quadam animi molestia, dum aliqualem confector ἀκρίβειαν, in quandam ἀπραγμοσύνην delapsus sentio. Ut hâc quæstione memet expediam ocyùs, reliquas prætermittens aliorum sententias, de reipsa sic statuo breviter & consentienter antedictis. Principiorum simpliciter ità dictorum, hoc est indemonstrabilium quæ in nulla quapiam scientia demonstrari possunt, aut debent, duo sunt genera, Hypotheses (vel Postulata), & Definitiones.

Hypotheses sunt propositiones, alicujus rei modum aliquem, actionem, aut motum evidenter possibilem assumentes, vel affirmantes. E. g. Ponatur punctum aliquod à loco A ad locum B ferri motu directo & indeflexo. Vel, Punctum ità ferri potest. Ponatur recta linea circa unum extremum defixum (vel immotum) rotari, donec in primum situm revolvatur. Vel recta linea tali pacto rotari potest. Ponantur duæ rectæ lineæ concurrere, vel intersecare se invicem, sic ut post occursum abeant in partes diversas. Vel duæ rectæ possunt ità concurrere. Ponatur triangulum rectangulum circa crus unum anguli recti completè revolvi. Ponatur recta linea A B quiescente extremo A rotari uniformiter (hoc est ità ut æqualibus temporibus æquales conficiat angulos) & eodem tempore punctum A ferri uniformiter in recta A B (hoc est ut æquis temporibus æqua decurrat intervalla) ponatur

A B

natur aliquod punctum in circuli vel ellipsis peripheria circumire, sic ut æquis temporibus pares efficiat angulos respectu designati puncti, quod sit puta centrum circuli, vel focus ellipseos. Ponatur à corporis lucidi vel illustrati puncto quodam ad oculum lineam rectam protendi. Ponatur lunam in recta collocari, quæ solem inter & oculum porrigitur, linea. Ponatur à puncto visibili per centrum oculi, vel ad centrum tunicæ retinæ radium derivari. Hujusmodi positiones quòd non assumantur temerè, quòd admitti debeant, hoc est quòd nihil continent possibilitati repugnans, sensus ipse commonstrat, experientia clarè contestatur. (Unde obiter liquet, quòd à veteribus Geometris est animadversum, sicut inter axiomata & theoremata, ità hypotheses inter & problemata admodum propinquam affinitatem versari. Prout enim problema structuræ cujusdam modum edocet, & possibilitatem demonstrat, sic hypothesis constructionem aliquam adsumit clarè possibilem. Eò scitè Proclus, ex Gemini sententia; διέστηκεν δὲ ὅμως ὥσπερ πρόβλημα θεωρήματος, οὕτω καὶ αἴτημα ἀξιώματος, εἰ καὶ ἀμφότερα ἀναπόδεικτα ἐστὶ, καὶ τὸ μὲν ὡς εὐπόριστον λαμβάνει, τὸ δὲ ὡς εὔγνωστον ὁμολογεῖ). h. e. In postulato, vel hypothesi, tanquam in problemate, quid facilè factibile adsumitur; in axiomate, ceu theoremate, quid facilè cognoscibile conceditur). Definitio autem est propositio, in quâ nomen imponitur vel adscribitur rei clarè resultantis ex aliqua possibili suppositione; quæ scilicet in ipsa propositione expressa nomen

illud

illud determinat ac circumſcribit. Veluti prædictis ſuppoſitionibus inſiſtendo; quod reſultat ex concurſu duarum rectarum linearum ſe interſectantium dicatur angulus rectilineus, vel angulus rectilineus eſt, qui fit ex tali concurſu. Quæ producitur ex rotatu lineæ rectæ figura plana dicatur circulus: Vel, Circulus eſt figura plana, quæ lineæ rectæ circumductu producitur. Quod provenit ex trianguli rectanguli circa crus unum anguli recti revolutione ſolidum, appelletur conus rectus. Vel, Conus rectus eſt corpus tali revolutione procreatum. Quæ fit ex duobus motibus uniformibus, recto & circulari, linea curva dicatur Helix; vel Helix eſt linea curva tali motuum compoſitione generata. Motus in peripheria circuli vel ellipſis, æquales reſpectu deſignati puncti conficiens angulos vocitetur motus medius; vel medius eſt, qui taliter afficitur motus.

A corporis lucidi, vel illuſtrati puncto verſus oculum protenſa recta nuncupetur radius. Quæ fit ab interpoſitu lunæ privatio lucis apparentis dicatur eclipſis Solis. A puncto viſibili per centrum oculi, vel ad centrum retinæ manans radius dicatur axis opticus. Quibus exemplis affatim patet, qualis ſit definitionis natura, quæ origo: Quódque in ipſâ reciprocè conveniant rei nomen; & nomini res; ſeu quòd hujus ſignificatio illius exiſtentiæ poſſibili adæquetur.

Ex hiſce duobus per ſyllogiſticam conſequentiam emergit tertium genus principii, quod vocari ſolet axioma vel dignitas, pro-

pronunciatum, communis notio, prolepsis (vel anticipatio). Hoc autem nihil est aliud quàm theorema quoddam in aliqua superiore præcedanea scientia perspicuè deductum & demonstratum à propriis definitionibus & hypothesibus istius scientiæ vel immediatè, vel per alia intermedia theoremata; adsumptúmque proinde sine probatione in scientia subordinata, vel saltem quod emergit ex hypothesi seu definitione quapiam in eadem ipsa scientia posita, consectarii ad modum per facillimam & evidentissimam consequentiam. Quæ axiomatis species propria dici solet isti peculiari scientiæ, sicut altera vocitatur communis; nimirum communis omnibus dictæ primariæ subjectis scientiis. E. g. Quæ eidem æqualia sibimet æquantur, commune censetur axioma, quoniam numeris, temporibus, motibus, ponderibus juxta convenit ac magnitudinibus; & in sola prima philosophia demonstratur, conclusionis ibidem seu theorematis rationem habens: Sed, omnes anguli recti sunt æquales; duæ rectæ lineæ spatium non continent, sunt axiomata propria, utpote quæ in sola Geometria primò locum obtinent, suque ea ex definitionibus recti anguli, & rectæ lineæ consectantur, & quodammodo demonstrantur. Sed hæc satis anteà luculentè prolatis exemplis exposuimus.

Ità demum quoad principiorum numerum prorsus accedimus Aristotelis primæ divisioni, in secundo capite primi Posteriorum exhibitæ, in hypotheses, definitiones, axiomata, licèt eorum minùs accuratam, saltem

saltem minùs liquidam expositionem improbemus. Accedimus quoque cum nostro, itidem principia in tres classes dispertienti, definitiones, postulata, pronunciata. Siquidem perinde est an suppositiones indemonstrabiles dicantur hypotheses an postulata; modò non ideò credantur dici postulata quòd illa demonstrator accipiat precariò, & quasi emendicet. Habent enim irrefragabilem ipsa certitudinem, ac evidentiam axiomatum claritati nulla ex parte cedentem; imò multis axiomatis clariora videntur, utpote cùm hæc ex illis dependeant & deriventur. Possent etiam axiomatum formam induere, sicut & problemata theorematum, nec ferè differunt ab iis, nisi quoad formam, & quia nequeunt, ut illa, demonstrari. Utcunque modestia nominis rei præstantiæ non debet detrahere.

Animadvertatur autem, id quod dictis objici potest, duas ab Euclide propositiones postulatis accenseri, quibus allata postulati vel hypothesis explicatio minime convenit; illas nempe, Rectos omnes angulos invicem æquari, & si linea recta duabus aliis rectis insistens angulos ad easdem insistentis partes internos duobus rectis minores effecerit, illas duas rectas aliquando, ad istas partes productas, concurrere. Respondeo minùs id accurate factum ab elementorum digestore (si quidem ab illo revera factum, nec in alienum locum istæ propositiones irrepserint, aliorum culpâ) rectiùsque proinde à Gemino, Proclo, & aliis plerisque interpretibus eas axiomatis annu-

annumerari; sunt enim revera theoremata, recti anguli, lineæque parallelæ definitiones confectantia.

Postquam hæc de principiis eorumque partitione concepissem animo, chartæque commendâssem, fortè conjiciens oculos in excellentissimi Geometræ Alphonsi Borelli librum perelegantem & perutilem, elementa Geometriæ novâ methodo digesta complectentem, cui nomen fecit Euclides restitutus, illum adverti principiorum naturæ & distinctioni elucidandis summam quam potuit curam, & subtilitatem impendisse, cùm in procemio operis, tum præsertim in iis quæ primæ elementorum propositioni immediatè præposita sunt. In ejus aliqua dicta, si prius obtulissent se, forsan nonnihil annotassem, sed quum nihil ferè contineant, quod acceptum commodè dissideat à nostris cogitatis, & quod ipse non aliquando perstrinxerim, cumque satis superque fuerit in hac re disputatum, impræsentiarum intacta præteribo, postea tamen cùm objecta fuerit opportunitas, unum fortassis, aut alterum punctum discussurus, ea præcipuè quibus Clavianam de definitionis natura sententiam impugnare videtur. Confero me jam ad specialia quædam de postulatis (vel hypothesibus) definitionibus, & axiomatis observanda.

Quoad hypotheses observari potest generatim earum cum fundamentum seu ratio, tum materies & extensio. Fundamentum & ratio hypothesium (sicut innuimus sæpius, nam effugere non possumus quamvis invisi quin eadem subinde repetamus, quod sanè

ſanè non abhorret ab hujuſmodi lectionum ingenio, & aliquatenus prodeſſe poteſt, cùm ex eo dictorum ſenſus, menſque dicentis eluceſcant clariùs & altiùs infigantur) hypotheſium, inquam, fundamentum eſt evidens experientia, ſeu per ſenſum aliquem quo forinſecus oblata percipimus, ſive per conſcientiam intimam, quâ motus internos, & immanentes nobis actiones perſentimus. Nihil enim ſupponi debet, cujus nullum experimentum edere, quod non appoſito aliquo exemplo confirmare valemus, aut illuſtrare. Cùm non aliâ ratione poſſit hypotheſis poſſibilitas oſtendi, de qua tamen certò conſtare debet auditori, ſcientiam ambienti. E. g. Hypotheſis optica, quòd à quovis objecti viſibilis puncto (phyſico ſaltem) recta linea luminoſa, ſeu radius ad oculum, ubicunque ſitum (in medio ſcilicet homogeneo) porrigatur, non aliter eſſet admittendum, niſi fulciri poſſet ejuſmodi notorio experimento, quòd ubique objectum aſpicitur, niſi corpus opacum alicubi in recta, illud inter & aſpectum linea collocatum impediat; incredibile videretur illud, & fere impoſſibile (propter imperveſtigabilem modi quo fit intelligentiam, & imperceptibilem naturæ ſubtilitatem) niſi planè fidem facere experientia. Ità ſiquid hypotheſis loco tradatur auditori minus probabile, minimè exploratum, tenetur id ſcientiæ choragus aliquo luculento paradigmate ſeu phænomeno commonſtrare (τῇ αἰσθήσει, ἢ τῷ δεικνύναι, ut ait Ariſtoteles): ſic ut antequam ulterius ad demonſtrationes procedatur, nulla *Poſt. ll. 7.*

ſuperſit

superest hæsitatio de rei suppositæ possibilitate, seu veritate.

Materia verò hypothesium est omnis actio, vel motus, vel modus entis, qui sub observationem cadit, aut experientiâ potest deprehendi. Speciatim Mathematicarum, quas præsertim respicimus, hypothesium materies ad omnia magnitudinis obvia cuivis sensui symptomata distenditur. Quamobrem ut hypothesium Mathematicarum materia rectè comprehendatur, debent generales, quarum omnis magnitudo capax est affectiones studiosè pensitari. Quare de iis jam opportunum erit disserere.

Magnitudinis quædam primaria notio sit, & maximè essentialis proprietas, à quâ reliquæ dimanant, à quibusdam anxiè disquiritur; inani forsan opera, & sine fundamento, cùm fortè nulla sit (meo certè judicio nulla est) cui talis prærogativa naturæ, talis ordinis primatus revera competat; at multæ sunt ejus proprietates ei pari jure, simili nexu congruentes, arctissimo vinculo cohærentes, implicitæ, adunatæ cum illi, tùm sibimet invicem. Quare de ipsarum ordine parùm solicitus primarias ejus affectiones potissimùm observabiles, quæque Mathematicis materiam suppediant hypothesibus, strictim atque κεφαλαιωδως recensebo, considerabo, conabor explicare. Verùm sentio me negotium aggredi fusiori dignum expositione, quàm ut tribus verbis possit absolvi; quódque malim non incipere, quàm statim abrumpere; cúmque memor sim,

totiens

toties expertus, quanto brevitati nimiæ paratior sit, quàm prolixitati venia, quantóque præstet non explere desiderium, quam creare fastidium auditoribus, in sequentes ista lectiones reservabo.

Μόνῳ τῷ σοφῷ θεῷ δόξα. Ἀμήν.

FINIS.